

大気境界層乱流の数値シミュレーション

浅沼 順

平成 17 年 4 月 14 日

目次

第 1 章	数値解法と解析解法	3
1.1	解析解 (analytical solution)	3
1.2	数値解 (numerical solution)	4
第 2 章	支配方程式とクロージャー問題	5
2.1	支配方程式	5
2.2	レイノルズ平均とレイノルズ方程式	6
2.3	乱流場の代表的なスケール	7
2.3.1	分子粘性のスケール	7
2.3.2	積分スケール	8
第 3 章	直接数値シミュレーション (DNS)	9
第 4 章	レイノルズ平均モデル (RANS): Stull (1988) より	10
4.1	1 次クロージャーモデル (渦粘性モデル)	10
4.2	1.5 次クロージャーモデル (乱流エネルギーモデル)	11
4.3	2 次クロージャーモデル	13
第 5 章	ラージエディシミュレーション (Large-Eddy Simulation: LES, Pope (2000) より)	14
5.1	フィルター	15
5.1.1	一次元でのフィルター	15
5.1.2	フィルターのフーリエ空間での表現	16
5.2	フィルター後のナビエストークス方程式	17
5.3	LES におけるクロージャー仮定	18
第 6 章	数値解析法	21
6.1	差分法	21
6.2	陰解法と陽解法	21
6.2.1	陽解法	22
6.2.2	陰解法	25

参考書

一般的な乱流力学の参考書で数値シミュレーションを扱っている本

- Pope (2000): Turbulent Flows (Pope, 2000)
- 木田・柳瀬 (1999): 「乱流力学」(木田・柳瀬, 1999).

一般的な数値流体力学 (CFD) の本 (未確認, <http://www.cfd-online.com> より)

- Ferziger and Perić (2002): Computational Methods for Fluid Dynamics (Ferziger and Perić, 2002).
- Anderson (1995): Computational Fluid Dynamics: The Basic with Application (John D. Anderson Jr, 1995).

大気境界層乱流のシミュレーション

- Stull (1988): An Introduction to Boundary Layer Meteorology (Stull, 1988).

第1章 数値解法と解析解法

一般的に物理学における現象の記述は，1) 支配方程式 (governing equation) を設定し，2) 支配方程式を解 (solution) を得ることによって行われる．例えば，以下の図に示すようなバネ (バネ定数 k) に付属する質点 m の位置 $x(t)$ に関する運動方程式 (ニュートンの第2法則) は以下の式で表現される

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (1.1)$$

ここで $\omega \equiv \sqrt{k/m}$ である．この2階常微分方程式を初期条件 (境界条件)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 & (\text{at } t = 0) \\ x = x_0 & (\text{at } t = 0) \end{cases} \quad (1.2)$$

のもとで解くことを考える．

1.1 解析解 (analytical solution)

解析的に解くには，

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数}) \quad (1.3)$$

が式 (1.1) の解の一つであることから，初期条件より

$$C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2} \quad (1.4)$$

となる．よって，解析解として

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(\omega t) \\ v \equiv \frac{dx}{dt} &= -\omega x_0 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

を得る．

あるいは， $\hat{x} \equiv x/x_0, \hat{t} \equiv \omega t = t/\sqrt{m/k}$ と無次元化すると，

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{x}}{d\hat{t}^2} &= -\hat{x} \\ \text{初期条件: } \begin{cases} \hat{v} = 0 & (\text{at } \hat{t} = 0) \\ \hat{x} = 1 & (\text{at } \hat{t} = 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

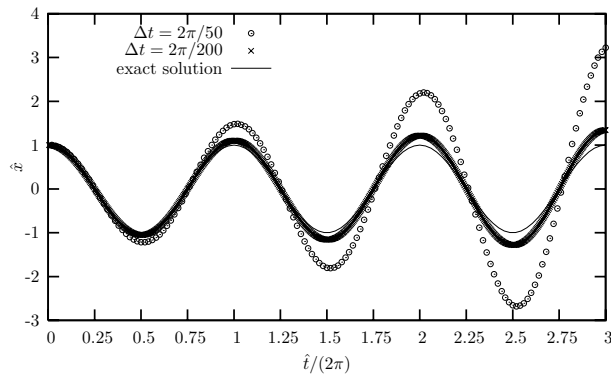


図 1.1: 式 (1.1) の厳密解 (解析解) と数値解

の解は

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \cos \hat{t} \\ \hat{v} &= \sin \hat{t}\end{aligned}$$

である．ここで $\hat{v} \equiv d\hat{x}/d\hat{t} = v/(\omega x_0)$ である．

1.2 数値解 (numerical solution)

式 (1.1) を差分法を用いて解くことを考える．式 (1.1) を書き直すと

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \hat{v} \quad (1.6)$$

$$\frac{d\hat{v}}{d\hat{t}} = -\hat{x} \quad (1.7)$$

$$\text{初期条件: } \begin{cases} \hat{v} = 0 & (\text{at } \hat{t} = 0) \\ \hat{x} = 1 & (\text{at } \hat{t} = 0) \end{cases}$$

となる．以下， $\hat{\cdot}$ 記号を省略する．前方差分

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t} \simeq \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

用いると式 (1.7) は，

$$\begin{aligned}x(t + \Delta t) &= x(t) + \Delta t v(t) \\ v(t + \Delta t) &= -\Delta t x(t) + v(t)\end{aligned}$$

となる．これを $t=0$ から繰り返し計算を行うことによって，解を求めることができる．

解析解と数値解を図 1.1 に示す．差分スキームが単純であること，特に 2 階の常微分方程式を前方差分で解いているため，時間の経過に伴って誤差が増大していくこと，格子間隔が小さくなるほど，数値解が厳密解に近づいていくことが明白に示されている．

第2章 支配方程式とクロージャー問題

以下，簡単のためデカルト（直交）座標形を用い，風速成分を $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ で表す．また，スカラー量（温度，比湿，二酸化炭素濃度）を c で表す．また，アインシュタイン記法を用い， $j = 1, 2, 3$ について和を取ることにする．

2.1 支配方程式

連続式（質量保存則）:

$$\rho_{,t} + (\rho u_j)_{,j} = 0 \quad (2.1)$$

風速が音速よりも小さいとき，大気は非圧縮流体と見なせる．

$$u_{j,j} = 0 \quad (2.2)$$

運動量保存則は以下の通り．

$$u_{i,t} + u_j u_{i,j} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij,j} - g \delta_{i3} \quad (2.3)$$

g は重力加速度， τ_{ij} は応力テンソルでニュートン流体では

$$\tau_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

で表される． $S_{ij} \equiv (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ は歪み度テンソルである．式 (2.4) を式 (2.3) に代入し，式 (2.2) を用いると，ナビエ＝ストークス方程式 (Navier-Stokes equation, NS-equation) を得る．

$$u_{i,t} + u_j u_{i,j} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} - g \delta_{i3} + \nu u_{i,jj} \quad (2.5a)$$

$\nu \equiv \mu/\rho$ は動粘性係数．あるいは，

$$u_{i,t} + (u_i u_j)_{,j} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} - g \delta_{i3} + \nu u_{i,jj} \quad (2.5a')$$

のようにも記述できる．また，スカラー量の保存則は

$$c_{,t} + u_j c_{,j} = \nu_c c_{,jj} \quad (2.5b)$$

で表される．

NS 方程式は，非定常・非線形の偏微分方程式であり，特殊な条件下以外では解析解は存在しない．そのため一般的な問題においては，数値解法によって解を見つけることが必要となる．式 (2.2) と (2.5a) に未知数 4 つ (u_i と p) に対して式が 4 つであり，原則的には解が見つかるはずである．しかしながら後で述べるように，式 (2.5a) の数値的な直接解は，特殊な場合を除いては解を見いだすのに非常に大きなコンピュータ能力を必要とする．そのため，乱流力学でなこれまで異なるアプローチを取ってきた．

2.2 レイノルズ平均とレイノルズ方程式

乱流はランダムな性質を持ち，乱流中の速度成分などの量は初期条件への依存性を短期間のうちに失うことが知られている．そのため瞬間値ではなく，統計的な平均値によって，乱流場の記述をする．瞬間値を平均値とそこからの偏差に分解する（レイノルズ分解）．

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad c = \bar{c} + c' \quad (2.6)$$

この平均操作（レイノルズ平均）を式 (2.2) に適用すると，レイノルズ平均に対する連続式が導かれる．

$$\bar{u}_{j,j} = 0 \quad (2.7)$$

また，ブシネスク近似を用いると平均流に対する運動量保存則（レイノルズ方程式），スカラー量の保存則は，以下のように記述できる．

$$\bar{u}_{i,t} + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} + \overline{(u'_i u'_j)},_j = -\frac{1}{\rho} \bar{p}_{,i} + g\beta \bar{\theta}_v \delta_{3i} + \nu \bar{u}_{i,jj} \quad (2.8a)$$

$$\bar{c}_{,t} + \bar{u}_j \bar{c}_{,j} + \overline{(u'_j c')},_j = \nu_c \bar{c}_{,jj} \quad (2.8b)$$

ここで $\beta \equiv 1/T_0$ で，熱拡張率（the rate of thermal expansion）である．

乱流の平均場を解くには，式 (2.7) と式 (2.8a) を解くことになる，仮に β を定数として与えたとしても，未知数 9 個 $(\bar{u}_i, \overline{(u'_i u'_j)}, p)$ に対し，式が 4 つでこれは方程式系として解を得ることができない．これは，式 (2.8a) が 2 次モーメントであるレイノルズ応力 $\overline{(u'_i u'_j)}$ を含むため，2 次モーメントに関する式の導出が必要である．

式 (2.5a) と (2.8a) の差，式 (2.5b) と (2.8b) の差を取ると，それぞれ偏差 $u'_i \equiv u_i - \bar{u}_i, c' = c - \bar{c}$ に関する式を得る．

$$u'_{i,t} + u'_j \bar{u}_{i,j} + \bar{u}_j u'_{i,j} + u'_j u'_{i,j} - \overline{(u'_i u'_j)},_j = g\beta \theta'_v \delta_{3i} - \frac{1}{\rho} p'_{,i} + \nu u'_{i,jj} \quad (2.13a)$$

$$c'_{,t} + u'_j \bar{c}_{,j} + \bar{u}_j c'_{,j} + u'_j c'_{,j} - \overline{(u'_j c')},_j = \nu_c c'_{,jj} \quad (2.13b)$$

u'_i に関する式 (2.13a) $\times u'_j$ と u'_j に関する式 (2.13a) $\times u'_i$ の和を取ることで $\overline{(u'_i u'_j)}$ に関する式を得る．

$$\begin{aligned} \overline{(u'_i u'_j)},_t + \bar{u}_k \overline{(u'_i u'_j)},_k &= -\overline{u'_i u'_k} \bar{u}_{j,k} - \overline{u'_j u'_k} \bar{u}_{i,k} + g\beta \overline{u'_j \theta'_v} \delta_{3i} + g\beta \overline{u'_i \theta'_v} \delta_{3j} \\ &\quad - \overline{(u'_i u'_j u'_k)},_k - \frac{1}{\rho} \left[\overline{(p' u'_j)},_i + \overline{(p' u'_i)},_j - p' \left(\overline{u'_{j,i} + u'_{i,j}} \right) \right] \\ &\quad + \nu \overline{(u'_i u'_j)},_{kk} - 2\nu \overline{u'_{i,k} u'_{j,k}} \end{aligned}$$

それぞれの項の相対的な大きさを比較すると， $\overline{(p' u'_j)},_i + \overline{(p' u'_i)},_j$ と $\nu \overline{(u'_i u'_j)},_{kk}$ は無視できる．

$$\begin{aligned} \overline{(u'_i u'_j)},_t + \bar{u}_k \overline{(u'_i u'_j)},_k &= -\overline{u'_i u'_k} \bar{u}_{j,k} - \overline{u'_j u'_k} \bar{u}_{i,k} + g\beta \overline{u'_j \theta'_v} \delta_{3i} + g\beta \overline{u'_i \theta'_v} \delta_{3j} \\ &\quad - \overline{(u'_i u'_j u'_k)},_k + \frac{p'}{\rho} \left(\overline{u'_{j,i} + u'_{i,j}} \right) - 2\epsilon_{ij} \end{aligned} \quad (2.14a)$$

ここで， $\epsilon_{ij} \equiv \nu \overline{u'_{i,k} u'_{j,k}}$ である．また，式 (2.13a) $\times c'$ と (2.13b) $\times u'_i$ の和を取ることで $\overline{(u'_i c')}$ に関する式を得る．各項の大きさを比較して無視できる項を無視すると，

$$\begin{aligned} \overline{(u'_i c')},_t + \bar{u}_j \overline{(u'_i c')},_j &= -\overline{u'_j c'} \bar{u}_{i,j} - \overline{u'_i u'_j} \bar{c}_{,j} - \overline{(u'_i u'_j c')},_j \\ &\quad + g\beta \overline{\theta'_v c'} \delta_{3i} + \frac{p'}{\rho} c'_{,i} - 2(\nu + \nu_c) \overline{u'_{i,j} c'_{,j}} \end{aligned} \quad (2.14b)$$

レイノルズ平均は，以下の条件を満たすことが必要である．

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g} \quad (2.9a)$$

$$\overline{af} = a\overline{f} \quad a \text{ は定数} \quad (2.9b)$$

$$\overline{a} = a \quad (2.9c)$$

$$\overline{f_{,i}} = \overline{f}_{,i} \quad \text{および} \quad \overline{f_{,t}} = \overline{f}_{,t} \quad (2.9d)$$

$$\overline{fg} = \overline{f}\overline{g} \quad (2.9e)$$

これを Reynolds の条件と呼ぶ．このうち，式 (2.9e) より以下の式を得る．

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f}, \quad \overline{f'} = \overline{f - \overline{f}} = 0, \quad \overline{\overline{f} \overline{h}} = \overline{f} \overline{h}, \quad \overline{\overline{f} g'} = \overline{f} \overline{h'} = 0 \quad (2.10)$$

Reynolds 条件を満たす平均操作として，一般的にはアンサンブル平均が考えられ，乱流理論はアンサンブル平均を念頭に組み立てられている．また，時間平均

$$\overline{u_i^T} = \frac{1}{T} \int_0^T u_i(t) dt \quad (2.11)$$

や空間平均

$$\overline{u_i^V} = \frac{1}{V} \iiint_V u_i(t) dx dy dz \quad (2.12)$$

も Reynolds 条件を満たす．これらの平均操作が，平均サンプル数 (平均区間) が大きくなればなるほど，母集団平均に近づくことをエルゴード性と呼ぶ．よって，時間平均 (空間平均) を Reynolds 平均として使用するには，エルゴード性が前提条件となっている．

式 (2.14a) と (2.14) には，3 次モーメント $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ と $\overline{u'_i u'_j c'}$ を含んでいる．このように，ある次数のモーメントに関する方程式は，それよりもさらに高次のモーメントを含む．よってどの次数までの方程式系も，方程式の数よりも多くの未知数を含み，閉じることはない．このような問題を「クロージャージャー問題」と呼ぶ．これは，乱流場をレイノルズ平均したモーメントで表す時の避けられない問題である．

2.3 乱流場の代表的なスケール

2.3.1 分子粘性のスケール

渦粘性における長さ，時間，速度のスケールは，乱流エネルギーの散逸率 (消散率) $\epsilon \equiv \epsilon_{ii} = \nu \overline{u_{i,j} u_{i,j}}$ を用いて定義される．次元解析から，長さ，時間，速度のスケールは以下の通りとなる．

$$\eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad \tau \equiv \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \quad v \equiv (\nu \epsilon)^{1/4} \quad (2.16)$$

Example 1 コルモゴロフのマイクロスケールの計算

乱流エネルギー方程式を定常，水平一様，圧力項，乱流輸送量を無視すると，以下の簡略な式になる．

$$\epsilon = g\beta\overline{w'\theta_v} - \overline{u'w'u}_{,3} \quad (2.15)$$

これを用いて ϵ を求め，コルモゴロフのマイクロスケールを計算してみよう．

これらのスケールは，コルモゴロフ (Kolmogorov) のマイクロスケールと呼ばれ，ロシアの文献では内部スケール (inner scale) と呼ばれている (Tennekes and Lumley, 1972)．コルモゴロフのマイクロスケールで作るレイノルズ数は，

$$\eta\nu/\nu = 1 \quad (2.17)$$

で，マイクロスケールでの運動が分子粘性の影響を強く受けることがわかる．

2.3.2 積分スケール

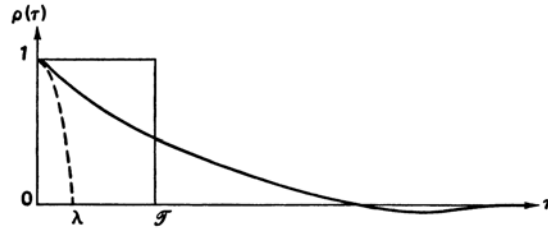


Figure 6.10. Sketch of an autocorrelation coefficient.

図 2.1: 自己相関関数と積分スケール (Tennekes and Lumley, 1972, より)

時系列として観測される風速 $u(t)$ の自己相関は以下のように定義される．

$$R_u(\tau) \equiv \overline{u'(t+\tau)u'(t)} \quad (2.18)$$

当然， $R_u(0) = \overline{u'^2}$ で分散である．積分時間スケール (integral time scale) は以下のように定義される．

$$\Lambda_u \equiv \frac{1}{\overline{u'^2}} \int_0^\infty R_u(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

同様に積分長さスケール (単に，積分スケール) も同様に定義される．積分スケールは，エネルギー保有領域に対応する乱流の最大渦のスケールを表す．ロシアでは，積分スケールの代わりに外部スケール (outer scale) と呼ぶ．また，接地層においては，積分スケールの推定が z (地表面からの高さ) になる．

第3章 直接数値シミュレーション(DNS)

ナビエ＝ストークス方程式 (式 (2.5a)) を直接、数値的に解くのが直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation) である。乱流の全ての変動値を捉える必要があることから、最小グリッドの大きさはコルモゴロフスケール η を大きく越えてはならない。また、計算領域の大きさは積分スケール Λ よりも小さくてはならない。よって、一方向のグリッドの数 N は、

$$N = \frac{\Lambda}{\eta} = \frac{\Lambda \epsilon^{1/4}}{\nu^{3/4}} = R_\Lambda^{3/4} \quad (3.1)$$

以上が必要である。ここで、 $R_\Lambda \equiv \overline{e}_t^{1/2} \Lambda / \nu$, ($\overline{e}_t \equiv \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$) は、乱流レイノルズ数である。よって、計算格子の数は、 $R_\Lambda^{9/4}$ のオーダーになり、また時間ステップも計算格子間隔に比例して小さくなるので、計算資源は R_Λ^3 のオーダーに比例する事になる。不安定条件における大気境界層においては、 $N = h/\eta$ (h は境界層高さ) は 10^6 のオーダーになるため、計算格子は 10^{18} のオーダーで必要となり、現時点では限られた計算空間に対する適用例しかないのが実状である。

DNS は、計算原理が簡単な代わりに、如何に計算資源を節約した計算を行うかが、技術的な課題となる。差分において安定したスキームを用いたり、スペクトル法を用いるなどの工夫が課題である。

第4章 レイノルズ平均モデル(RANS): Stull (1988) より

前述の通り，レイノルズ平均場に関する式系は，必ず高次のモーメントを含むため，直接に解くことが不可能である．レイノルズ平均モデル (Reynolds-averaged Navie-Stokes equation model, RANS) では，高次のモーメントをより低次のモーメントで表すことによって式系から未知数の数を減らし，レイノルズ平均場を解く．

大気境界層乱流のコミュニティでは，同様のモデルをクロージャーモデル (closure model) と呼ぶ．また，クロージャーモデルで用いられる高次のモーメントを低次のモーメントで表す仮定を，クロージャー仮定 (closure assumption) あるいはクロージャー近似 (closure approximation) などと呼ぶ．クロージャーモデルはその複雑度の度合いを次数で表す．例えば，2 次モーメントを 1 次モーメントで表すクロージャー仮定を用いるクロージャーモデルは，1 次クロージャー (1st-order closure model), 3 次モーメントを 2 次モーメントで表現するクロージャー仮定を用いるモデルは，2 次クロージャー (2nd order) と呼ばれる．

4.1 1 次クロージャーモデル (渦粘性モデル)

1 次クロージャーモデルは，レイノルズ平均の方程式系を解く．浮力への水蒸気の影響を無視すると，乱流速度場は温度の平均値の式を加えて，解くことになる．

$$\bar{u}_{i,t} + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = -(\overline{u'_i u'_j})_{,j} - \frac{1}{\rho} \bar{p}_{,i} + g \beta \bar{\theta} \delta_{3i} + \nu \bar{u}_{i,jj} \quad (2.8a')$$

$$\bar{\theta}_{,t} + \bar{u}_j \bar{\theta}_{,j} = -(\overline{u'_j \theta'})_{,j} + \nu_c \bar{\theta}_{,jj} \quad (2.8b')$$

これらのうち， $\overline{u'_i u'_j}, \overline{u'_j \theta'}$ を他の項で表すことにより，方程式系が解けることになる．

レイノルズ応力 $\overline{u'_i u'_j}$ のうち非等方性の部分は，分子粘性とのアナロジーから，以下のようにモデル化できる．

$$\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \bar{e}_t \delta_{ij} = -2\nu_T \bar{S}_{ij} \quad (4.2)$$

ここで， $S_{ij} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ は歪み度テンソルであり， ν_T は渦粘性係数 (eddy viscosity, turbulent viscosity) と呼ばれる．これは，ニュートン流体における歪み度と粘性の関係

$$-\frac{1}{\rho}(\tau_{ij} + P\delta_{ij}) = -2\mu S_{ij} \quad (2.4')$$

とアナロジーがある．

大気境界層乱流のモデルにおいては，上記をさらに簡略し，

$$\overline{u'_i \chi'} = -K_{\chi,i} \bar{\chi}_{,i} \quad (4.3)$$

と仮定する．ここで， χ は u_i もしくはスカラー量， $K_{\chi,i}$ を渦粘性係数 (eddy viscosity)，渦拡散係数 (eddy diffusivity)，渦輸送係数 (eddy transfer coefficient) などと呼ぶ．式 (4.3) を K 理論とも呼ばれ，古典的な混合距離理論からも導くことができる．

式 (4.3) を z 方向の運動量，顕熱，水蒸気の輸送について記述すると，

$$\overline{u'w'} = -K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad \overline{w'\theta'} = -K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad \overline{w'q'} = -K_E \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \quad (4.4)$$

というなじみ深い表現となる． K の値は，定数あるいは他の量の関数として与えることになる．例えば，一様な地表面上の接地層においてはモニン＝オブコフ相似則 (Monin=Obukhov Similarity) が成立し，無次元勾配は以下のように表される．

$$\frac{kz}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \phi_{\bar{u}} \left(\frac{z}{L} \right) \quad \frac{kz}{|\theta_*|} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \phi_{\bar{\theta}} \left(\frac{z}{L} \right) \quad \frac{kz}{|q_*|} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \phi_{\bar{q}} \left(\frac{z}{L} \right) \quad (4.5)$$

ここで， $u_* \equiv \sqrt{-\overline{u'w'}}$ ， $\theta_* \equiv -\overline{w'\theta'}/u_*$ ， $q_* \equiv -\overline{w'q'}$ は摩擦速度 (friction velocity)，摩擦温度 (friction temperature)，摩擦比湿 (friction specific humidity)．また， L はオブコフ長さである．よって，

$$K_m = \frac{ku_*z}{\phi_{\bar{u}}}, \quad K_H = \frac{ku_*z}{\phi_{\bar{\theta}}}, \quad K_E = \frac{ku_*z}{\phi_{\bar{q}}} \quad (4.6)$$

が得られる．

水平一様の大気境界層を仮定し分子粘性項を無視すると，支配方程式は以下ようになる．

$$\bar{u}_{,t} = f_c \bar{v} - (\overline{u'w'})_{,3} - \frac{1}{\rho} \bar{p}_{,1} \quad (4.7a)$$

$$\bar{v}_{,t} = -f_c \bar{u} - (\overline{v'w'})_{,3} - \frac{1}{\rho} \bar{p}_{,2} \quad (4.7b)$$

$$\bar{\theta}_{,t} = -(\overline{w'\theta'})_{,3} \quad (4.7c)$$

ここで， f_c はコリオリ係数．クロージャー仮定は，

$$\overline{u'w'} = -K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad \overline{v'w'} = -K_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad \overline{w'\theta'} = -K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (4.7d)$$

となり，渦粘性係数のパラメタリゼーションと境界条件 (圧力勾配) が与えられれば，未知数 6 に対し方程式が 6 で，この方程式系は解くことができる．

一般の大気境界層の 1 次クロージャーモデルは，式 (4.3) の $K_{\chi,i}$ を与え，平均場のレイノルズ方程式 (式 (2.8)) を解くことで，大気境界層をシミュレートする．しかしながら，上記の様に運動量や熱・物質の流れを局地的な勾配でのみ表していることから，勾配の小さな混合層内を運動量やスカラー量が輸送されることを表現できないこと，また平均場で渦粘性係数を表すパラメータ化に無理があることから，そこで高次のモデルが必要となってくる．

4.2 1.5 次クロージャーモデル (乱流エネルギーモデル)

後述する 2 次クロージャーでは， $\overline{u'_i u'_j}$ に関する式の計 6 個が加わることで，方程式も未知数も格段に増え消費する計算資源も膨大に増えることになる．そのため，中間的な対処として，平均値の

方程式に乱流エネルギー (TKE) 方程式を加えた方程式を解くのが、1.5 次クロージャーと呼ばれる。TKE 方程式は、式 (2.8a) において $i = j$ とする事によって得られる。

$$\bar{e}_{,t} + \bar{u}_k \bar{e}_{,k} = -\overline{u'_i u'_k \bar{u}_{i,k}} + g\beta \overline{u'_i \theta'_v} \delta_{3i} - (\overline{e u'_k})_{,k} - \frac{1}{\rho} (\overline{p' u'_i})_{,i} - \epsilon \quad (4.8)$$

ここで $\epsilon \equiv \overline{\nu u'_{i,k} u'_{i,k}}$ は、TKE の平均消散率 (散逸率) である。また、温度の分散に関する方程式は、

$$(\overline{\theta' \theta'})_{,t} + \bar{u}_j (\overline{\theta' \theta'})_{,j} = -2\overline{u'_j T' \bar{\theta}}_{,j} - (\overline{u'_j T' T'})_{,j} - 2\epsilon_T \quad (4.9)$$

ここで消散項は、

$$2\nu_T \overline{T'_{,jj} T'} = \nu_T [(\overline{T' T'})_{,jj} - 2\overline{T'_{,j} T'_{,j}}] \quad (4.10)$$

$$\simeq -2\nu_T \overline{T'_{,j} T'_{,j}} \equiv 2\epsilon_T \quad (4.11)$$

である。このように、乱流強度および温度の分散に関する方程式を加えて、これらの量について解くことによって、渦粘性係数の乱流輸送の効率に関する情報を用いたパラメタリゼーションが可能になる。

1 次クロージャーにおいてと同様に、水平一様を仮定し分子粘性項を無視すると、これらの方程式系は、以下の通りとなる。

$$\bar{u}_{,t} = f_c \bar{v} - (\overline{u' w'})_{,3} - \frac{1}{\rho} \bar{p}_{,1} \quad (4.12a)$$

$$\bar{v}_{,t} = -f_c \bar{u} - (\overline{v' w'})_{,3} - \frac{1}{\rho} \bar{p}_{,2} \quad (4.12b)$$

$$\bar{\theta}_{,t} = -(\overline{w' \theta'})_{,3} \quad (4.12c)$$

$$\bar{e}_{,t} = -\overline{u' w'} (\bar{u})_{,3} - \overline{v' w'} (\bar{v})_{,3} + g\beta \overline{w' \theta'} - (\overline{w' e} + \overline{w' p'} / \rho)_{,3} - \epsilon \quad (4.12d)$$

$$(\overline{\theta' \theta'})_{,t} = -2\overline{w' \theta' \bar{\theta}}_{,3} - (\overline{w' \theta' \theta'})_{,3} - 2\epsilon_T \quad (4.12e)$$

方程式中の 2 次、3 次モーメントのパラメタリゼーションが必要となるが、以下のように与えられる。

$$\overline{u' w'} = -K_m (\bar{e}, \overline{\theta' \theta'}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad \overline{v' w'} = -K_m (\bar{e}, \overline{\theta' \theta'}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad \overline{w' \theta'} = -K_H (\bar{e}, \overline{\theta' \theta'}) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (4.12f)$$

$$\overline{w' e} + \overline{w' p'} / \rho = \frac{5}{3} \Lambda_4 \bar{e}^{-1/2} \bar{e}_{,3} \quad \overline{w' \theta' \theta'} = \Lambda_3 \bar{e}^{-1/2} \overline{\theta' \theta'}_{,3} \quad (4.12g)$$

$$\epsilon = \frac{\bar{e}^{3/2}}{\Lambda_1} \quad \epsilon_T = \frac{\bar{e}^{1/2} \overline{\theta' \theta'}}{\Lambda_2} \quad (4.12h)$$

ここで、 Λ は経験的な長さの次元を持つパラメータである。渦粘性係数のパラメタリゼーションはさらに複雑であるが、大まかには

$$K = \Lambda \bar{e}^{1/2} \quad (4.12i)$$

の形をしている。式 (4.12) の方程式系には、5 つの予報変数と 4 つの 2 次モーメント、2 つの 3 次モーメント、2 つの消散項で、計 13 個の未知数を含む。これに対して 13 個の方程式があり、数値的に解を求めることができる。TKE を用いた 1.5 次クロージャーの応用例として有名なものに、Yamada and Mellor (1975) がある。

工学系の乱流シミュレーションでは、式 (4.12) に加えて TKE の消散率 ϵ をに関する式を加えるのが一般的である。これは、 ϵ についても解くことによって、式 (4.12) での Λ のパラメタリゼーションの不確かさを避けていることになる。このようなモデルを $K - \epsilon$ モデルと呼ぶ (工学系では TKE を K で表すのが一般的)。

4.3 2次クロージャーモデル

1.5 次クロージャーに加えて、2 次モーメントに関する全ての方程式を解くのが 2 次クロージャーである。2 次のクロージャーにおいては、3 次モーメントがパラメタライズされる。しかしながら、2 次モーメントの方程式の全ての項を入れて解くと、その分計算資源がかかることと、式 (4.12) にあるような不確かなパラメタリゼーションを必要とすることになる。そこで、Mellor and Yamada (1974) は、大気境界層における各項のオーダー比較から、どのオーダーまでの項を含めるかで、2 次クロージャーモデルを Level1 から Level4 にまで分類した。Level4 が最も複雑で Level1 が最も単純な方程式系を解いている。

第5章 ラージエディシミュレーション (Large-Eddy Simulation: LES, Pope (2000) より)

これまで述べた中で、RANS は乱流の統計量を高次統計量とそれよりも低次の統計量の関係 (クロージャー仮定) を用いて計算する。RANS の最も大きな障害は、クロージャー仮定の部分であり、最適なクロージャー仮定を見いだすことに、多くの努力が費やされている。一方で、DNS は乱流の全ての変動を計算するため、計算格子をエネルギー消散のスケール (マイクロスケール) と同じ程度までにする必要があるため、高レイノルズ数乱流を対象にした計算は、現時点では適用不能である。しかしながら、DNS の計算のほとんどの部分は、消散領域における小さな運動の計算に費やされているが、この波数領域は等方性が成立しやすく、比較的乱流現象が普遍的な性質を示し易い領域である。

計算コストの面は DNS と RANS の中間的な存在である LES では、非等方で流れの幾何形状に強く依存する低波数領域 (格子上スケール) を直接計算し、比較的等方で (ある程度) 普遍的な法則の成立しやすい高波数領域 (サブグリッドスケール, 格子下スケール) を簡単なモデルで表している。運動エネルギーのほとんどを保有する低波数領域を直接計算することから、RANS よりも精度良い乱流場の再現が可能であり、高波数領域を直接計算せずにモデル化することから、DNS よりも効率のよい計算が可能になる。

LES における概念的な 4 段階は以下の通りである。

1. 格子上 (grid, resolved, filtered) スケールとサブグリッド (residual, subgrid) スケールを分割するフィルターを定義する。
2. ナビエ = ストークス方程式から格子上スケールでの支配方程式を導く
3. サブグリッドでのモーメントをモデル化することによって、支配方程式を閉じた方程式にする。
4. 数値計算によって、上記の格子上スケールでの方程式の解を求める。

LES は最初、Smagorinsky et al. (1963), Lilly (1967), Deardorff (1970) らによって成された。大気境界層への応用は、Deardorff (1973), Deardorff (1974) が最初である。また今日の大気境界層乱流への応用の多くは、Deardorff (1980) および Moeng (1984) による支配方程式系を用いている。

5.1 フィルター

DNS においては風速成分 $u(x, t)$ の全ての変動を計算するが, LES においては $u(x, t)$ にローパスフィルターを掛けた $\langle u \rangle(x, t)$ を計算する. このローパスフィルターは以下のように定義される.

$$\langle u \rangle(x, t) = \int G(r, x) u(x - r, t) dr \quad (5.1)$$

ここで積分は全領域を積分範囲とする. あるいは Einstein 記法では,

$$\langle u_i \rangle = \iiint_{-\infty}^{\infty} G(r_i) u_i(x_i - r_i, t) dr_1 dr_2 dr_3 \quad (5.2)$$

と表される. ここで, $G(r_i)$ はフィルター関数で,

$$1 = \iiint_{-\infty}^{\infty} G(r_i) dr_1 dr_2 dr_3 \quad (5.3)$$

$$G(r_i) = G(-r_i) \quad (5.4)$$

を満たす. このフィルター後の速度場 $\langle u_i \rangle$ を用いて, 元の速度場 u_i は以下のように分解される.

$$u_i = \langle u_i \rangle + u_i'' \quad (5.5)$$

式 (5.5) は, 一見レイノルズ分解と同様に見えるが, 大きく異なる. それは, 式 (5.2) によって定義されるフィルターが, 特殊な場合を除いては, 以下のようにレイノルズ条件 (Box 1) を満たしていないからである.

$$\langle u_i \rangle \neq \langle \langle u_i \rangle \rangle \quad (5.6)$$

よって,

$$\langle u_i'' \rangle \neq 0 \quad (5.7)$$

ともなる. よって, LES によって解く方程式は, レイノルズ方程式とは異なる.

5.1.1 一次元でのフィルター

簡単のため, 一次元における例

$$\langle u \rangle(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r) u(x - r, t) dr \quad (5.8)$$

を考えると, 以下のようなフィルター関数が考えられる.

	$G(r)$	$\hat{G}(\kappa)$
箱形	$\frac{1}{\Delta} H\left(\frac{1}{2}\Delta - r \right)$	$\frac{\sin(\frac{1}{2}\kappa\Delta)}{\frac{1}{2}\kappa\Delta}$
ガウス関数	$\left(\frac{6}{\pi\Delta^2}\right) \exp\left(-\frac{6r^2}{\Delta^2}\right)$	$\exp\left(-\frac{\kappa^2\Delta^2}{24}\right)$
フーリエ打ち切型	$\frac{\sin(\pi r/\Delta)}{\pi r}$	$H\left(\frac{\pi}{\Delta} - \kappa \right)$

表 5.1: 一次元フィルター関数 $G(r)$ の例． Δ はフィルターの特性スケールである．

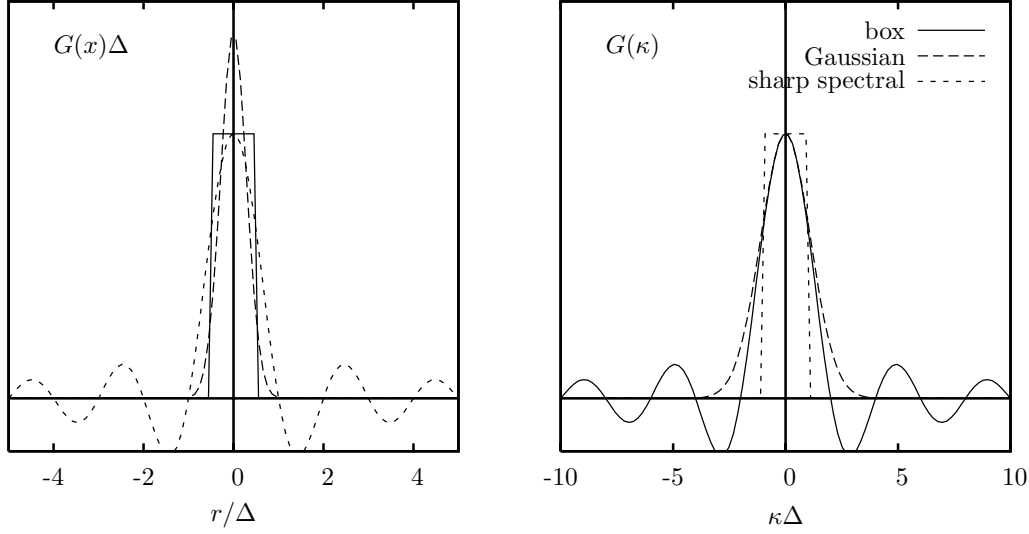


図 5.1: 一次元フィルターの例．実空間 (左) とフーリエ空間 (右)

5.1.2 フィルターのフーリエ空間での表現

フィルターの効果は，フーリエ空間でさらに明白である． $u(x)$ のフーリエ変換を $\hat{u}(\kappa)$ で表すと，

$$\hat{u}(\kappa) \equiv \mathcal{F}\{u\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\kappa x} dx \quad (5.9)$$

式 (5.8) のフーリエ変換は，

$$\widehat{\langle u \rangle}(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa x} dx \int_{-\infty}^{\infty} G(r) u(x-r, t) dr \quad (5.10)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x-r, t) e^{-i\kappa(x-r)} dx \int_{-\infty}^{\infty} G(r) e^{-i\kappa r} dr \quad (5.11)$$

$$= \hat{u}(\kappa) \hat{G}(\kappa) \quad (5.12)$$

となる．ここで，伝達関数 $\hat{G}(\kappa)$ は，

$$\hat{G}(\kappa) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(r) e^{-i\kappa r} dr = 2\pi \mathcal{F}\{G\} \quad (5.13)$$

である．この伝達関数は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(r) dr = \hat{G}(0) = 1 \quad (5.14)$$

を満たす．表 5.1，図 5.1 に G に対応する伝達関数を示している．

これを用いると， $\langle\langle u \rangle\rangle$ のフーリエ変換は， $\hat{G}(k)^2 \hat{u}$ となり，一般に上で示したように， $\langle u_i \rangle \neq \langle\langle u_i \rangle\rangle$ であることがわかる．しかしながら，フーリエ打ち切り型のフィルターを使用すると，

$$\hat{G}(k)^2 = \hat{G}(\kappa) \quad (5.15)$$

であることから，レイノルズ条件が満たされることになる．

このような LES におけるフィルターは，実空間での LES では陰に，スペクトル法を用いてフーリエ空間で方程式を解く場合には，明示的に現れることになる．

5.2 フィルター後のナビエ＝ストークス方程式

これまでに示したようなローパスフィルターを，支配方程式に適用することで，LES において解く方程式系を導くことができる (Leonard, 1974)．上記のフィルターが線形で，微分に対して交換可能であるが，レイノルズ条件を満たさないことを念頭に置くと，まず連続式は以下ようになる．

$$\langle u_j \rangle_{,j} = 0 \quad (5.16a)$$

また，ナビエ＝ストークス方程式，スカラー量の保存則はそれぞれ，

$$\begin{aligned} \langle u_i \rangle_{,t} + \langle u_j \rangle \langle u_i \rangle_{,j} &= \langle u_j \rangle \langle u_i \rangle_{,j} - \langle u_j u_i \rangle_{,j} - g \delta_{3i} - \frac{1}{\rho} \langle p \rangle_{,i} + \nu \langle u_i \rangle_{,jj} \\ &= -\tau(u_i, u_j)_{,j} - g \delta_{3i} - \frac{1}{\rho} \langle p \rangle_{,i} + \nu \langle u_i \rangle_{,jj} \end{aligned} \quad (5.16b)$$

$$\begin{aligned} \langle c \rangle_{,t} + \langle u_j \rangle \langle c \rangle_{,j} &= -(\langle u_j c \rangle - \langle u_j \rangle \langle c \rangle)_{,j} + \nu_c \langle c \rangle_{,jj} \\ &= -\tau(u_j, c)_{,j} + \nu_c \langle c \rangle_{,jj} \end{aligned} \quad (5.16c)$$

ここで， $\tau(a, b)$ は Germano 演算子 (Germano, 1992) であり，

$$\tau(a, b) \equiv \langle ab \rangle - \langle a \rangle \langle b \rangle \quad (5.17)$$

と定義される．例えば $\tau(u_i, u_j)$ は，フィルター操作を加えることによって生じた付加的な応力であり，サブグリッド応力 (subgrid scale (SGS) stress, residual stress) などと呼ばれ，レイノルズ方程式におけるレイノルズ応力に似た役割を持つ．もちろんフィルターがレイノルズ平均の時には，サブグリッド応力はレイノルズ応力となる．

$u_i = \langle u_i \rangle + u_i''$ を代入すると、サブグリッド応力は以下のように分解される。

$$\begin{aligned}\tau(u_i, u_j) &\equiv \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \\ &= L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}\end{aligned}\tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}L_{ij} &\equiv \langle \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \rangle - \langle \langle u_i \rangle \rangle \langle \langle u_j \rangle \rangle \\ C_{ij} &\equiv \langle \langle u_i \rangle u_j'' \rangle + \langle u_i'' \langle u_j \rangle \rangle - \langle \langle u_i \rangle \rangle \langle u_j'' \rangle - \langle u_i'' \rangle \langle \langle u_j \rangle \rangle \\ R_{ij} &\equiv \langle u_i'' u_j'' \rangle - \langle u_i'' \rangle \langle u_j'' \rangle\end{aligned}\tag{5.19}$$

L_{ij}, R_{ij}, C_{ij} は、Leonard 応力、クロス応力、サブグリッドレイノルズ応力である。

5.3 LES におけるクロージャー仮定

レイノルズ方程式においては、平均流に関する方程式系は閉じていないため、レイノルズ応力を平均流によって表すクロージャー仮定が必要であった。同様にフィルターを掛けたナビエ=ストークス方程式（式 (5.16)）を解くためには、サブグリッド応力をフィルター後の風速場 $\langle u_i \rangle$ 、スカラー場 $\langle c \rangle$ で表す必要がある。最もよく用いられる LES におけるクロージャー仮定は、Smagorinsky et al. (1963) によるものであり、以下の式で表される。

$$\tau(u_i, u_j) - \frac{2}{3} e_s \delta_{ij} = -\nu_s (\langle u_i \rangle_{,j} + \langle u_j \rangle_{,i})\tag{5.20}$$

ここで、 e_s はサブグリッドスケールの運動エネルギーであり、

$$e_s \equiv \frac{1}{2} \tau_{ii} = \frac{1}{2} (\langle u_i u_i \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_i \rangle)\tag{5.21}$$

で表される。式 (5.20) は、RANS における渦粘性モデル

$$\overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3} \overline{e_t} \delta_{ij} = -\nu_T (\overline{u_i}_{,j} + \overline{u_j}_{,i})\tag{4.2'}$$

そしてニュートン流体における分子粘性モデル

$$-\frac{1}{\rho} (\tau_{ij} + P \delta_{ij}) = -\mu (u_{i,j} + u_{j,i})\tag{2.4''}$$

と同様の式形を持つ。また式 (5.20) における ν_s はサブグリッドスケールにおける渦粘性係数というべきものであり、以下のようにモデル化される。

$$\nu_s = (C_s \Delta)^2 \left[\frac{1}{2} (\langle u_i \rangle_{,j} + \langle u_j \rangle_{,i}) (\langle u_i \rangle_{,j} + \langle u_j \rangle_{,i}) \right]^{\frac{1}{2}}\tag{5.22}$$

式 (5.20) と (5.22) を併せてスマゴリンスキーモデルと呼ぶ。 Δ はフィルターの特性長さ（格子間隔）、 C_s はスマゴリンスキー定数と呼ばれる。スマゴリンスキー定数は、大きなスケールからサブグリッドスケールへの運動エネルギー流入とエネルギー消散率が等しいことを用いて、 $C_s \sim 0.2$ であることがわかっている。

スマゴリンスキーモデルの欠点は、スマゴリンスキー定数が実際は時空間で一定では無いこと、また大気中では浮力が重要な役割を果たすため、スマゴリンスキー定数を求めるときの仮定が成立しな

い、などが挙げられる。そのため、乱流力学の世界では、スマゴリンスキー定数を時空間で方程式を解きながら求める手法、動的スマゴリンスキーモデルが提案されている。

一方、大気境界層への応用では、Deardorff (1980), Moeng (1984) などによって、フィルター場の方程式とともにサブグリッドスケール運動エネルギー e_s を方程式系に加えて解く手法を用いることが多い。これによって、サブグリッド渦粘性係数 ν_s などを e_s を用いてモデル化することで、方程式系を閉じさせることができる。これは、クロージャーモデルの 1.5 次クロージャーと同じ原理である。

表 5.2: How large can large-eddy simulation be?

Refs	Domain (km)	Grids	Grid spacing(m)	scheme
Moeng (1984)	$5^2 \times 2$	$32^2 \times 40$		pseudo-spect.
Khanna and Brasseur (1997)	$(5z_i)^2 \times 2z_i$	128^3 or 192^3		pseudo-spect. Nested
Avisar et al. (1998)	$6.4^2 \times 2$	$64^2 \times 50$	$100^2 \times (5to50)$	RAMS-LES leap-frog in t , nested
	$10.4^2 \times 2$	$52^2 \times 50$	$200^2 \times (5to50)$	RAMS-LES, FIFE domain
Avisar and Schmidt (1998)	$40 \times 3.8 \times 2.5$	$400 \times 38 \times 46 = 7.0 \times 10^5$	$100^2 \times (20to100)$	RAMS-LES
Albertson(1999)	$6.3^2 \times 1.5$	$64 \times 32 \times 80$		pseudo-spect., Adams-Bash. in t
Gopalakrishnan et al. (2000)	$19.2 \times 4.8 \times 2.6$	$160 \times 40 \times 26 = 1.6 \times 10^5$	$120^2 \times (10to120)$	RAMS-LES
Gopalakrishnan and Avisar (2000)	$19.2 \times 4.8 \times 2.6$	$160 \times 40 \times 26 = 1.6 \times 10^5$	$120^2 \times (10to120)$	RAMS-LES w/LPD
Kimmel et al. (2002)	$5^2 \times 2$	$144^3 = 3 \times 10^6$		pseudo spect. w/horiz scalar grad.
Kanda et al. (2004)	$16^2 \times 2.8$	$320^2 \times 50 = 5 \times 10^6$		PALM

第6章 数値解析法

6.1 差分法

関数 $u(x)$ の $x = x$ 周りの Taylor 展開は以下の通りである。

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_x + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_x + \cdots \quad (6.1)$$

これを用いて、 $u(x)$ の離散的な表現 u_i から微分係数が求められる。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad : \text{前方差分} \quad (6.2)$$

同様に $u(x - \Delta x)$ を x 周りに Taylor 展開すると、

$$u(x - \Delta x) = u(x) + (-\Delta x) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x + \frac{(-\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_x + \frac{(-\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_x + \cdots \quad (6.3)$$

となり、微分係数

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad : \text{後方差分} \quad (6.4)$$

を得る。式 (6.2), (6.4) とともに、差分誤差は $O(\Delta x)$ である。大抵の数値流体計算においては、これは十分な精度とはいえない。式 (6.1) と式 (6.3) の差を取ることによって、以下の差分式を得る

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad : \text{中央差分} \quad (6.5)$$

差分誤差は、 $O(\Delta x)^2$

二階微分も同様に、

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (6.6)$$

を得る。

6.2 陰解法と陽解法

例として、熱伝導方程式を挙げる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (6.7a)$$

これを、初期条件及び境界条件

$$\begin{cases} T(x, t = 0) = T_0 & \text{for } 0 < x < l \\ T(x = 0, t) = T(x = l, t) = T_1 & \text{for } 0 < t < \infty \end{cases} \quad (6.7b)$$

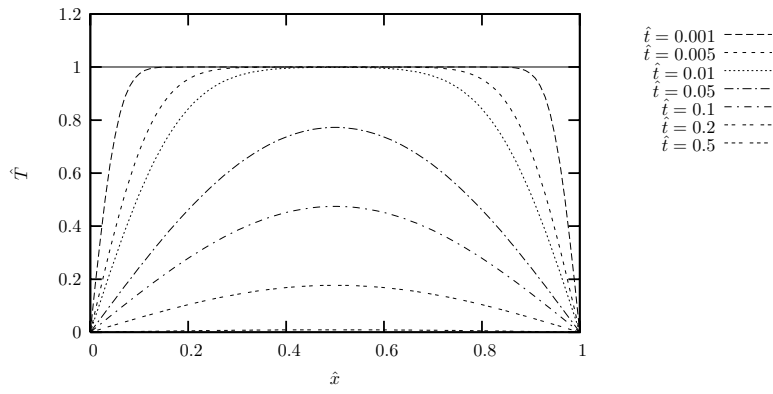


図 6.1: 式 (6.8) の解析解

の下に解くことを考える． $\hat{x} = x/l, \hat{t} = t\alpha/l^2, \hat{T} = (T - T_1)/(T_0 - T_1)$ と無次元化すると，上式は，

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} \quad (6.8a)$$

$$B.C. \begin{cases} \hat{T}(x, t = 0) = \hat{T}_0 \equiv 1 & \text{for } 0 < x < 1 \\ \hat{T}(x = 0, t) = \hat{T}(x = l, t) = \hat{T}_1 \equiv 0 & \text{for } 0 < t < \infty \end{cases} \quad (6.8b)$$

解析解は，

$$\hat{T}(\hat{x}, \hat{t}) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin n\pi \hat{x} \exp(-n^2 \pi^2 \hat{t}) \quad (6.9)$$

である．

6.2.1 陽解法

$T(x, t) = T(i\Delta x, j\Delta t) = T_i^j$ として，支配方程式を差分化すると以下の式を得る．

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \quad (i = 1 \dots N, j = 1 \dots M) \quad (6.10)$$

これを書き直すと

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j) \quad (i = 1 \dots N, j = 1 \dots M) \quad (6.11)$$

これを用いれば， $t = j\Delta t$ における $T_i^j (i = 0, 1, 2, \dots)$ が既知であれば， $T_i^{j+1} (i = 0, 1, 2, \dots)$ を順次得ることができる。このように差分化した方程式が未知数を一つだけ含み、この方程式を直接解くことによって、順次解を求めていく方法を陽解法と呼ぶ。

Example 2 陽解法における安定性

適当な $\Delta x, \Delta t$ を選んで式 (6.11) の数値積分を実行して見よう．どのような時に，解が安定，あるいは不安定になるかを調べてみよう．

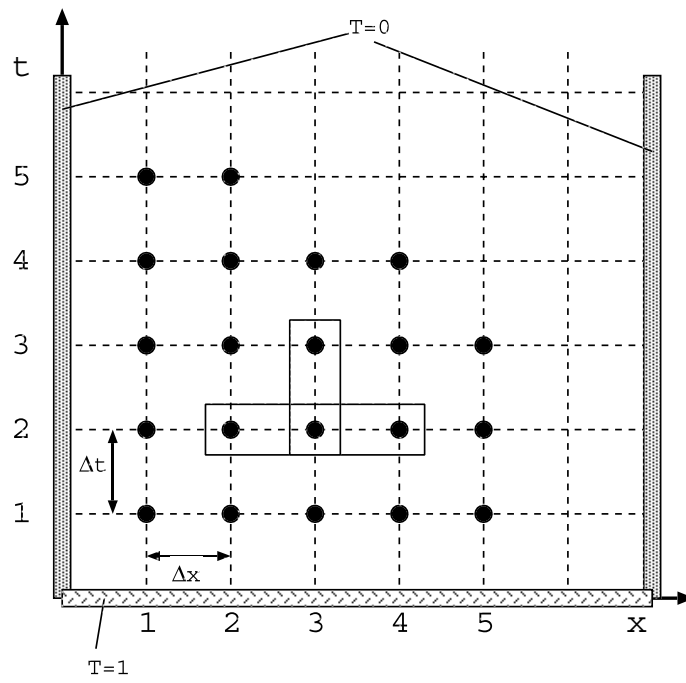
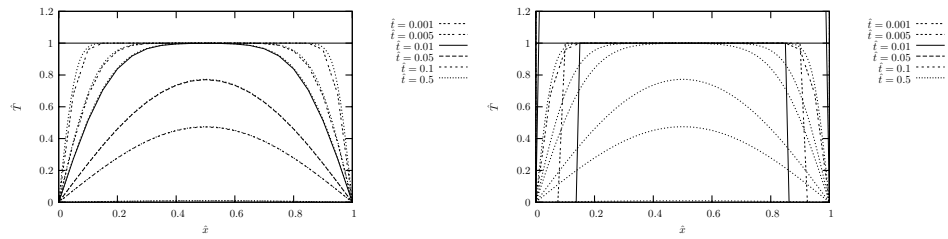
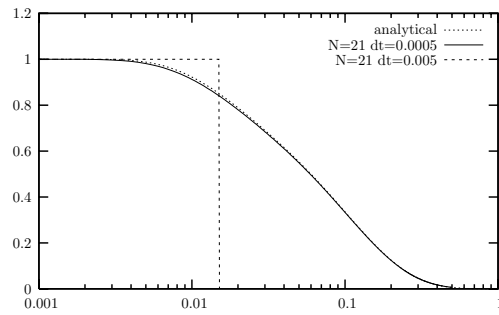


図 6.2: 式 (6.11) における計算格子点の配置と計算手順



(a) $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.0005$

(b) $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.005$



(c) $\hat{x} = 0.25$ における時間断面 ($\Delta x = 0.05$)

図 6.3: 式 (6.11) を用いた差分法による熱伝導方程式 (6.8) の数値解

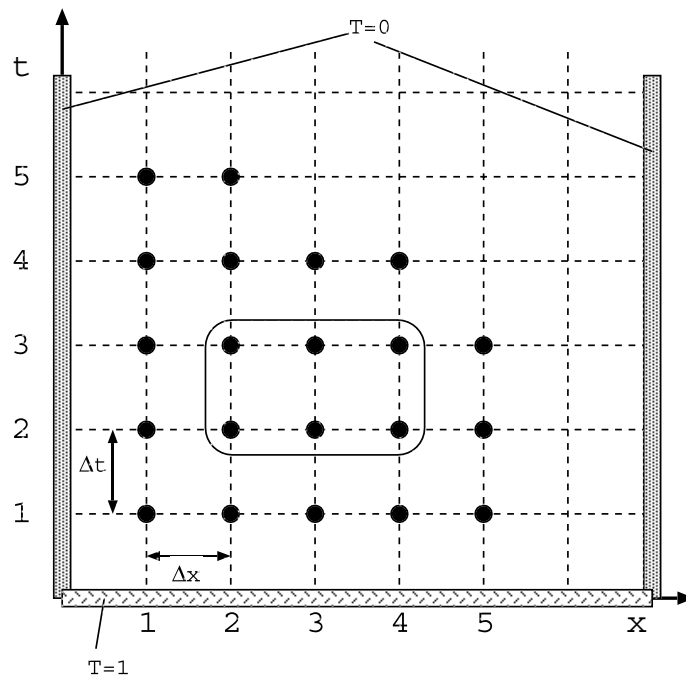


図 6.4: 式 (6.17) における計算格子点の配置と計算手順

数値解法の解は，二つの誤差による影響を受ける (Ferziger and Perić, 2002) .

差分化誤差：方程式の解析解と差分化した方程式の「正確な」(丸め誤差の影響を受けていない) 解の差 .

丸め誤差：計算機の数値精度は有限であり，計算機内部で数値が繰り返し丸められることによる誤差によって，解析解 A ，正確な数値解 D ，実際の数値解 N の間の関係は以下の通りとなる .

$$\text{差分化誤差} = A - D$$

$$\text{丸め誤差} = N - D$$

これらの誤差が，時間ステップを進めるに従って増大・減少するとき，数値計算はそれぞれ，不安定，安定であるという．一般には，下の方程式に上記の式を代入することによって，これらの誤差に関する方程式を立て，かつこれをフーリエ分解する事により，安定・不安定の条件を得ることができる．これは，支配方程式・差分化の方法によって異なる．式 (6.11) の安定条件は，

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

である .

6.2.2 陰解法

式 (6.8) の別の差分化を考える．式 (6.10) では右辺の空間差分を時間ステップ j での格子点値で表したが，今度は，時間ステップ j と $j+1$ の平均で表してみる．

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = \frac{(T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}) + (T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j)}{2(\Delta x)^2} \quad (i = 1 \dots N, j = 1 \dots M) \quad (6.12)$$

式 (6.12) の差分法を Crank-Nicolson 差分法と呼び，式 (6.8) のような放物線型の偏微分方程式の差分化に多く用いられる．

式 (6.12) を書き換えると

$$AT_{i-1}^{j+1} - BT_i^{j+1} + AT_{i+1}^{j+1} = -T_i^j - A(T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j) \quad (i = 1 \dots N, j = 1 \dots M) \quad (6.13)$$

$$A \equiv \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}$$

$$B \equiv 1 + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

となり，右辺の $t = j\Delta t$ での T が既知であるとする，未知数が 3 つであり，陽解法のような逐次計算は不可能である．しかしながら既知である右辺を

$$K_i^j \equiv -T_i^j - A(T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j) \quad (6.14)$$

と置くと， $i = 3 \dots N-2$ では，

$$AT_{i-1}^{j+1} - BT_i^{j+1} + AT_{i+1}^{j+1} = K_i^j \quad (i = 3 \dots N-2, j = 1 \dots M) \quad (6.15)$$

となり，また境界の隣の点 ($i = 2, N-1$) では，境界条件 $T_1^{j+1} = T_N^{j+1} = T_1$ を用いて，

$$\begin{aligned} -BT_2^{j+1} + AT_3^{j+1} &= K_2'^j \quad (j = 1 \dots M) \\ AT_{N-2}^{j+1} - BT_{N-1}^{j+1} &= K_{N-1}'^j \quad (j = 1 \dots M) \\ K_i'^j &\equiv K_i^j - AT_1 \quad (j = 1 \dots M) \end{aligned} \quad (6.16)$$

となる．全ての格子点 ($i = 2, N-1$) について，行列形式で表示すると，

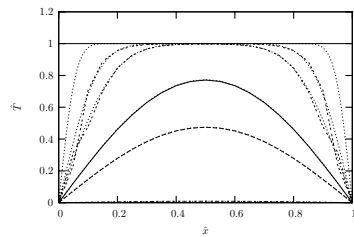
$$\begin{bmatrix} -B & A & & & \\ A & -B & A & & \\ \cdots & A & -B & A & \\ & & & & \\ & & & A & -B & A & \cdots \\ & & & & A & -B & A \\ & & & & & A & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2^{j+1} \\ T_3^{j+1} \\ T_4^{j+1} \\ \cdots \\ T_{N-3}^{j+1} \\ T_{N-2}^{j+1} \\ T_{N-1}^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2'^j \\ K_3^j \\ K_4^j \\ \cdots \\ K_{N-3}^j \\ K_{N-2}^j \\ K_{N-1}'^j \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

となる．式 (6.17) の右辺は時間ステップ j での格子点値と境界条件から成り立つの既知であり，行列式を解くことによって時間ステップ $j+1$ での格子点値が求まることとなる．このように，陽解法のように逐次的に次の時間ステップでの格子点値を求めるのではなく，現在の格子点値と次の時間ス

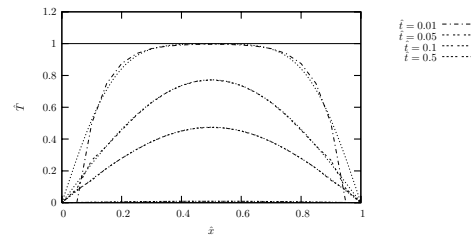
Example 3 Crank-Nicolson 法による陰解法

Crank-Nicolson による陰解法を用いて，式 (6.8) を数値的に解いてみよう．

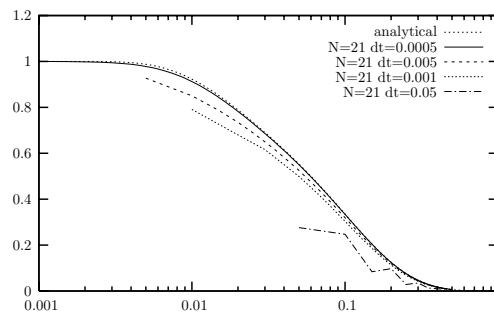
トップでの格子点値の連立方程式を解くことによって数値積分を進めていく手法を陰解法と呼ぶ．一般に陰解法で登場する行列式は，式 (6.17) のように対角線上のみに要素が並ぶ準対角行列であることが多く，一般の行列式解法よりも効率の良い解法が利用できる．式 (6.17) の行列は，3 重対角行列 (tridiagonal) と呼ばれ専用のルーチンも存在する．



(a) $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.005$



(b) $\Delta x = 0.05, \Delta t = 0.01$



(c) $\hat{x} = 0.25$ における時間断面 ($\Delta x = 0.05$)

図 6.5: 式 (6.11) を用いた差分法による熱伝導方程式 (6.8) の数値解

関連図書

- Avissar, R., Eloranta, E.W., Gurer, K., and Tripoli, G.J. (1998): An evaluation of the large-eddy simulation option of the regional atmospheric modeling system in simulating a convective boundary layer: A life case study. *J. Atmos. Sci.*, **55**, pp. 1109–1130
- Avissar, R. and Schmidt, T. (1998): An evaluation of the scale at which ground-surface heat flux patchiness affects the convective boundary layer using large-eddy simulations. *J. Atmos. Sci.*, **55**, pp. 2666–2689
- Deardorff, J.W. (1970): A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *J. Fluid. Mech.*, **41**, pp. 453–480
- Deardorff, J.W. (1973): Three-dimensional numerical modeling of the planetary boundary layer. In Haugen, D.A., editor, *Workshop on Micrometeorology*. Am. Meteorol. Soc., Boston, MA
- Deardorff, J.W. (1974): Three-dimensional numerical study of turbulence in an entraining mixed layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, **7**, pp. 199–226
- Deardorff, J.W. (1980): Stratocumulus-capped mixed layers derived from a 3-dimensional model. *Boundary-Layer Meteorol.*, **18**, pp. 495–527
- Ferziger, J.H. and Perić, M. (2002): *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer
- Germano, M. (1992): Turbulence - the filtering approach. *J. Fluid. Mech.*, **238**, pp. 325–336
- Gopalakrishnan, S., Roy, S.B., and Avissar, R. (2000): An evaluation of the scale at which topographical features affect the convective boundary layer using large eddy simulations. *J. Atmos. Sci.*, **57**, pp. 334–351
- Gopalakrishnan, S.G. and Avissar, R. (2000): An LES study of the impacts of land surface heterogeneity on dispersion in the convective boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, **57**, pp. 352–371
- John D. Anderson Jr (1995): *Computational Fluid Dynamics: The Basic with Application*. McGraw-Hill, Inc.
- Kanda, M., Inagaki, A., Letzel, M., Raasch, S., and Watanabe, T. (2004): LES study of the energy imbalance problem with eddy covariance fluxes. *Boundary-Layer Meteorol.*, **110**(3), pp. 381 – 404
- Khanna, S. and Brasseur, J.G. (1997): Analysis of monin-obukhov similarity from large-eddy simulation. *J. Fluid. Mech.*, **345**, pp. 251–286

- Kimmel, S.J., Wyngaard, J.C., and Otte, M.J. (2002): "log-chipper" turbulence in the convective boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, **59**, pp. 1124–1134
- Leonard, A. (1974): Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flow. *Adv. Geophys.*, **18A**, pp. 237–248
- Lilly, D. (1967): The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments. In *Proc. IBM scientific computing symposium on Environmental Sciences, IBM Form No. 320-1951*, pp. 195–210
- Mellor, G. and Yamada, T. (1974): A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, **31**, pp. 1791–1806
- Moeng, C.H. (1984): A large-eddy-simulation model for the study of planetary boundary-layer turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **41**, pp. 2052–2062
- Pope, S.B. (2000): *Turbulent Flows*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK
- Smagorinsky, J., Manabe, S., and Holloway, J.L. (1963): Numerical results from a nine-level general circulation model of the atmosphere. *Mon. Weather Rev.*, **91**(99-164)
- Stull, R.B. (1988): *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers
- Tennekes, H. and Lumley, J.L. (1972): *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, Cambridge, MA. 300pp
- Yamada, T. and Mellor, G. (1975): A Simulation of the Wangara Atmospheric Boundary Layer Data. *J. Atmos. Sci.*, **32**, pp. 2309–2329
- 木田重雄・柳瀬真一郎 (1999): 乱流力学. 浅倉書店

索引

$K - \epsilon$ モデル, 12
1.5 次クロージャーモデル, 11
1 次クロージャーモデル, 10

closure approximation, 10
closure assumption, 10
closure model, 10
Crank-Nicolson 差分法, 25

direct numerical simulation, 9

eddy diffusivity, 11
eddy transfer coefficient, 11
eddy viscosity, 10, 11

friction velocity, 11

inner scale, 8
integral time scale, 8

Kolmogorov, 8

Monin=Obukhov Similarity, 11

outer scale, 8

TKE 方程式, 12
turbulent viscosity, 10

オブコフ長さ, 11
クロージャーモデル, 10
クロージャー仮定, 10
クロージャー近似, 10
クロージャー問題, 7
コルモゴロフ, 8
ナビエ=ストークス方程式, 9
ブシネスク近似, 6
マイクロスケール, 8
モニン=オブコフ相似則, 11

レイノルズ応力, 6
レイノルズ数, 8
レイノルズ分解, 6
レイノルズ平均, 6
レイノルズ平均モデル, 10
レイノルズ方程式, 6

陰解法, 26
渦粘性モデル, 10
渦粘性係数, 10
渦輸送係数, 11

解析解, 3

外部スケール, 8

混合距離理論, 11

散逸率, 12

自己相関, 8

消散率, 12

数値解, 4

積分スケール, 8
積分時間スケール, 8
積分長さスケール, 8
接地層, 8, 11

直接数値シミュレーション, 9

内部スケール, 8

熱拡張率, 6

摩擦温度, 11
摩擦速度, 11
摩擦比湿, 11

陽解法, 25

乱流エネルギー, 12

乱流レイノルズ数, 9