

# 相似則から見た大気境界層

浅沼 順

平成 19 年 1 月 31 日

---

## 目 次

1	相似則とは	2
2	大気境界層への応用	3
2.1	中立な接地層	4
2.2	一般の接地層 (モニン=オブコフ相似則)	4
2.3	オブコフ長さ	5
2.3.1	乱流エネルギー方程式とオブコフ長さ	6
2.4	局所自由対流 (Local free convection)	6
3	プロファイルの相似則	7
4	分散の相似則	8
5	消散率の相似則	9
5.1	スペクトル, 構造関数と消散率	10
6	スカラー同士の相似	11

---

## 表 目 次

1	不安定時の $\phi(\zeta)$ の振る舞い	7
2	不安定時の分散に関する $\phi(\zeta)$ の振る舞い	8
3	Empirical forms for $\phi_w$ in the unstable ASL found in the literature.(constants are adjusted for $k = 0.4$ ). Adjusted from Asanuma (1996)	9
4	Empirical forms for $\phi_\theta$ in the unstable ASL found in the literature(constants are adjusted for $k = 0.4$ ) Adjusted from Asanuma (1996).	10
5	Empirical forms for $\phi_q$ in the unstable ASL found in the literature (constants are adjusted for $k = 0.4$ ). Adjusted from Asanuma (1996).	11

---

## 相似則

### 1 相似則とは

高さ  $h$  から質量  $m$  の質点が落下し、地面に落ちるときの速度  $v_0$  を求める。通常の力学的方法では、まず支配方程式 (Newton の第一運動法則) を立て、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \quad (1)$$

それから、境界条件を設定する。

$$\begin{cases} x = h \\ \frac{dx}{dt} = 0 \end{cases} \quad \text{for } t = 0 \quad (2)$$

式 (1) を式 (2) のもとに積分して解くと

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + h \quad (3)$$

という常微分方程式の解が得られる。この解において  $x = 0$  とおくと

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (4)$$

となるので、

$$v_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\sqrt{\frac{2h}{g}}} = -\sqrt{2gh} \quad (5)$$

同じ問題を相似則 (=次元解析 +  $\alpha$ ) を使って求めてみる。 $v_0$  に関連する (支配する) パラメータを考えると、高さ  $h$ 、重力加速度  $g$ 、質量  $m$  ぐらいであろう。求める  $v_0$  とともに、これらのパラメータの次元を調べてみると、

$$\begin{cases} m & [\mathcal{M}] \\ g & [\mathcal{L}/\mathcal{T}^2] \\ v_0 & [\mathcal{L}/\mathcal{T}] \\ h & [\mathcal{L}] \end{cases} \quad (6)$$

となり、4つのパラメータが

$$\begin{cases} \mathcal{M} & \text{質量の次元} \\ \mathcal{L} & \text{長さの次元} \\ \mathcal{T} & \text{時間の次元} \end{cases} \quad (7)$$

3つの次元に存在することになる。これらのパラメータを使って、無次元量を作ることを考える。ある無次元量  $X$  を、

$$X = m^a g^b v_0^c h^d \quad (8)$$

これを次元解析によって、解くと

$$\begin{cases} a & = 0 \\ b + c + d & = 0 \\ -2b - c & = 0 \end{cases} \quad (9)$$

となり、4つの未知数に対して式が3つ、すなわち自由度が1となり、1つの変数で残りの他の変数が表される。

$$c = -2b \quad d = b \quad a = 0 \quad (10)$$

よって

$$X = \left( \frac{gh}{v_0^2} \right)^b \quad (11)$$

よって、唯一の無次元数  $gh/v_0^2$  が得られたことになる。

バッキンガムの  $\pi$  定理によれば、無次元数が唯一である場合は、これが定数になるから

$$\frac{gh}{v_0^2} = C \quad (\text{定数}) \quad (12)$$

ここで、 $C$  は相似則によつては得られず、実験的に得られる無次元定数である。上式より

$$v_0 = \pm \sqrt{\frac{gh}{C}} \quad (13)$$

力学解と比較すると  $C = 1/2$  である。

ここで示すように、相似則による現象推論の中で最も重要であるのは、求めたい数量あるいはそれを支配する現象にとって、どのような現象が重要であり、どのようなパラメータに支配されているかを推論することである。この部分には、現象への洞察が必要とされ、相似則を単なる次元解析と大きく分けへだつところである。

## 2 大気境界層への応用

水平一様な大気境界層における乱流エネルギー ( $\text{TKE}, \overline{e_t} = (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})/2$ ) の収支方程式は、以下のように書ける。

$$\frac{\partial \overline{e_t}}{\partial t} = -\overline{u'w'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \frac{g}{T_a} \overline{w'\theta'_v} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{w'e'_t} + \frac{1}{\rho} \overline{w'p'} \right) - \epsilon \quad (14)$$

このように、1次元大気境界層においては、シアと浮力が乱流を支配していると考えられる。

これをもとに、接地層内の風速、スカラー（温度、比湿、二酸化炭素）の平均量の傾度、分散やその他のモーメントを支配するパラメータを考える。まず、シアの強さを表す指標として、地表面における運動量輸送量から、

$$u_* \equiv \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{-\overline{u'w'}_0} \quad \text{次元} : [\mathcal{L}/T] \quad (15)$$

また、浮力の強さを示すパラメーターとして、式 (14) における浮力項の地表面での値を考えて

$$B \equiv \frac{g}{T_a} \overline{w'\theta'_v}_0 \quad \text{次元} : [\mathcal{L}^2/T^2] \quad (16)$$

また、境界層内の大気の運動は底面に存在する壁面（地表面）に大きく制約されており、地表面からの高さも支配パラメータである。

$$z \quad \text{次元} : [\mathcal{L}] \quad (17)$$

これらのパラメータを使って、接地層内の諸量を求めていく。

## 2.1 中立な接地層

大気が完全に等温位状態であるときには、式 (14) の浮力項はゼロとなる。  
 風速の鉛直勾配  $\partial \bar{u} / \partial z$  を例にとると、関連するパラメータは、

$$\begin{cases} u_* & [\mathcal{L}/T] \\ z & [\mathcal{L}] \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} & [1/T] \end{cases} \quad (18)$$

2つの次元に3つのパラメータがあるので、唯一の無次元量が定義でき、定数に等しい。

$$\frac{z}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{1}{k} = \text{const.} \quad (19)$$

ここで、 $k$  はカルマン定数であり、近年の研究 (Högström, 1985, 1996) では、ほぼ 0.4 をとることが知られている。上式を積分すると、いわゆる風速の対数分布が得られる。

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \log \left( \frac{z}{z_0} \right) \quad (20)$$

比湿の鉛直勾配も同様に考えて、

$$\begin{cases} u_* & [\mathcal{L}/T] \\ z & [\mathcal{L}] \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} & [\mathcal{Q}/\mathcal{L}] \\ \frac{\overline{w'q'}}{u_*} & [\mathcal{L}\mathcal{Q}/T] \end{cases} \quad (21)$$

3つの次元に4つのパラメータであることから、上記と同様に考え、

$$\frac{zu_*}{\overline{w'q'}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \frac{z}{q_*} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \frac{1}{k_v} = \text{const.} \quad (22)$$

となる。 $k_v$  は  $k$  と同様の定数であり、相似則からはその値についての情報は得られないが、観測結果などから、 $k = k_v$  であることがわかっている (Högström, 1985)。

$$\bar{q} = \frac{q_*}{k} \ln \left( \frac{z}{z_{0v}} \right) \quad (23)$$

ここで、

$$q_* \equiv \frac{\overline{w'q'}}{u_*} \quad (24)$$

であり、摩擦比湿などと呼ばれ、 $z_{0v}$  は比湿に対する粗度である。

## 2.2 一般の接地層 (モニン=オブコフ相似則)

一般の安定状態においては、パラメータが一つ増えることになる。風速の鉛直勾配  $\partial \bar{u} / \partial z$  を例にとると、関連するパラメータは、

$$\begin{cases} u_* & [\mathcal{L}/T] \\ z & [\mathcal{L}] \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} & [1/T] \\ B & [\mathcal{L}^2/T^3] \end{cases} \quad (25)$$

であり、2つの次元に対して4つのパラメータとなり、無次元数が2つできることになる。ここでは、

$$\frac{kz}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad \text{と} \quad \frac{Bkz}{u_*^3} \quad (26)$$

を考える。ここで、 $u_*^3/Bk$  は長さの次元であることから、

$$L = -\frac{u_*^3}{Bk} = \frac{-T_a u_*^3}{kgw'\theta_{v0}} \quad (27)$$

をオブコフ長さ (Obukhov's length) と呼ぶ。バッキンガムの  $\pi$  定理によれば、無次元数が複数できる場合は、それらは互いに関数関係になる。よって

$$\frac{kz}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \phi_{\bar{u}} \left( \frac{z}{L} \right) \quad (28a)$$

温度、比湿に対しても同様に

$$\frac{kz}{\theta_*} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \phi_{\bar{\theta}} \left( \frac{z}{L} \right) \quad (28b)$$

$$\frac{kz}{q_*} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \phi_{\bar{q}} \left( \frac{z}{L} \right) \quad (28c)$$

ここで、 $\phi_{\bar{u}}, \phi_{\bar{\theta}}, \phi_{\bar{q}}$  は、関数であり普遍的であるので、普遍関数 (universal function) と呼ばれ、実験的に求められる (Businger et al., 1971; Businger, 1973, 1988; Wyngaard, 1973; Tennekes, 1973; Haugen, 1973; Panofsky and Dutton, 1984; Högström, 1988; Kader and Yaglom, 1990; Högström, 1996)。図 1 はその一例である。

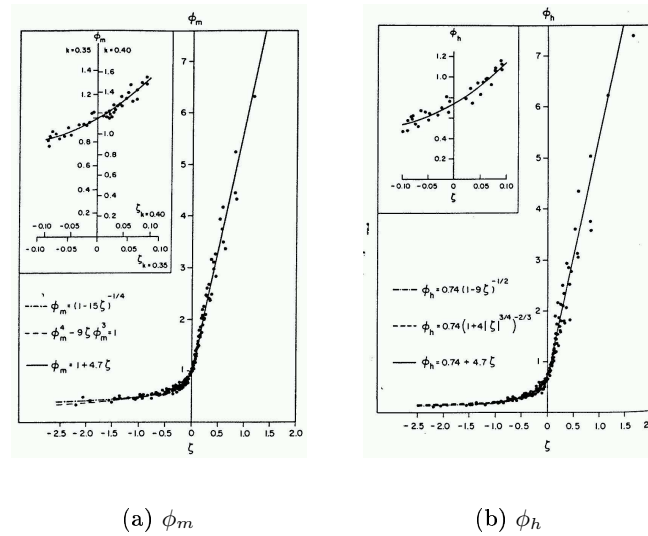


図 1: Kansas 実験によって求められた  $\phi_m$  と  $\phi_h$  (Businger et al., 1971)

### 2.3 オブコフ長さ

オブコフ長さは、Obukhov (Obukhov, 1946; Monin and Obukhov, 1954, Businger and Yaglom (1971) 参照) によって提唱された。その意味するところを考えてみよう。

### 2.3.1 乱流エネルギー方程式とオブコフ長さ

風速分布を対数則で近似し ( $d\bar{u}/dz = u_*/kz$ ), 式 (14) の右辺第 1 項 (シアー生成項) と第 2 項 (浮力項) が等しいと考えると

$$-\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2 \cdot \frac{u_*}{kz} = \frac{g}{T_a} \overline{w'\theta'_0} \quad (29)$$

となり、 $z = -L$  で両者が等しくなることがわかる。ここで地表面近くを考え、 $\overline{u'w'} = \overline{u'w'_0}$ ,  $\overline{w'\theta'_0} = \overline{w'\theta'_{00}}$  としている (現実には必ずしも正しくない)。つまり近似的にはオブコフ長さの絶対値は、乱流エネルギーの二つの生成項が釣り合う高さで、それよりも下はシアー項が、上は浮力項が、それぞれ卓越することになる。接地層の中でシアー項と浮力項の強弱が交代する高さといえることができる。

フラックスリチャードソン数は乱流エネルギー方程式 (式 (14)) の右辺第 1 項と第 2 項の比) であるので、上記と同じ仮定を用いると

$$R_f \equiv \frac{(g/T_a)\overline{w'\theta'}}{\overline{u'w'}(\partial \bar{u}/\partial z)} \simeq -\frac{z}{L} \quad (30)$$

となる。

### 2.4 局所自由対流 (Local free convection)

非常に不安定な時 ( $\zeta \rightarrow -\infty$ ) は、式 (14) の第 2 項 (浮力項) が第 1 項 (シアー生成項) に比べて重要となり、シアーの影響が無視できる。このような条件を局所自由対流 (local free convection) と呼ばれる (Tennekes, 1970; Wyngaard et al., 1971)。このようなときは影響するパラメータに  $u_*$  が入らず、浮力パラメータ  $B$  のみになる。前と同じように風速の鉛直勾配  $\partial \bar{u}/\partial z$  を例にとると、関連するパラメータは、

$$\begin{cases} z & [\mathcal{L}] \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} & [1/T] \\ B & [\mathcal{L}^2/T^3] \end{cases} \quad (31)$$

となり、2 つの次元に対し 3 つのパラメータが存在するため、中立の時と同じように 1 つの無次元数ができることになる。風速のスケールを

$$w_{**} \equiv \left( \frac{g}{T_a} \overline{w'\theta'_{00}} z \right)^{\frac{1}{3}} \quad (32)$$

のように定義すると、中立の時と同様に無次元数が以下のようになり、定数になる。

$$\frac{kz}{w_{**}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = C_{\bar{u}} = \text{const.} \quad (33)$$

温位、比湿に対しても以下のようにスケールを考えると、

$$\theta_{**} \equiv \frac{\overline{w'\theta'_0}}{w_{**}} \quad q_{**} \equiv \frac{\overline{w'\theta'_{00}}}{w_{**}} \quad (34)$$

無次元化すると以下のように定数に等しくなる。

$$\frac{kz}{\theta_{**}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = C_{\bar{\theta}} \quad \frac{kz}{q_{**}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = C_{\bar{q}} \quad (35)$$

文献によっては,  $w_{**}, \theta_{**}, q_{**}$  は,  $u_f, \theta_f, q_f$  と記されることもある.

式 (33) を MOS の形に書き直すには,

$$\frac{w_{**}}{u_*} = \frac{\left(\frac{g}{T_a} \overline{w \theta_{v0}} z\right)^{\frac{1}{3}}}{u_*} = k^{-\frac{1}{3}} (-\zeta)^{\frac{1}{3}} \quad (36)$$

を用いると,

$$\phi_{\overline{u}}(-\zeta) \equiv \frac{kz}{u_*} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \frac{kz}{w_{**}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \cdot \frac{w_{**}}{u_*} = C_{\overline{u}} k^{-\frac{1}{3}} (-\zeta)^{\frac{1}{3}} \quad (37)$$

ここで,  $\zeta \equiv (z/L)$  である. 同様に, 式 (35) を書き直すと,

$$\phi_{\overline{\theta}}(\zeta) = C_{\overline{\theta}} k^{\frac{1}{3}} (-\zeta)^{-\frac{1}{3}} \quad \phi_{\overline{q}}(\zeta) = C_{\overline{q}} k^{\frac{1}{3}} (-\zeta)^{-\frac{1}{3}} \quad (38)$$

となる.

温位, 比湿のプロファイル (Högström, 1988, 参照) に関しては, 観測データから実証されているが, 風速のプロファイル  $\phi_{\overline{u}}$  に関しては, 未だに議論の対象となっている (Kader and Yaglom, 1990; Brutsaert, 1991, 1999; Högström, 1996, 参照).

局所自由対流の結果は,  $\zeta \rightarrow -\infty$  における普遍関数  $\phi(\zeta)$  の振る舞いを示しており, 中立での振る舞いを示す式 (20), (22) とともに, 普遍関数  $\phi(\zeta)$  の関数形に関する情報を与えてくれる. 表 1 に,  $\phi_{\overline{u}}, \phi_{\overline{\theta}}, \phi_{\overline{q}}$  の不安定時の振る舞いをまとめた.

表 1: 不安定時の  $\phi(\zeta)$  の振る舞い

$\zeta$	不安定		中立
	$\zeta \rightarrow -\infty$	$\zeta < 0$	$\zeta = 0$
$\phi_{\overline{u}}(\zeta)$	$\sim (-\zeta)^{\frac{1}{3}}$		1
$\phi_{\overline{\theta}}(\zeta)$	$\sim (-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$		—
$\phi_{\overline{q}}(\zeta)$	$\sim (-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$		1

### 3 プロファイルの相似則

式 (28) のように, 風速, 温度, 比湿の鉛直プロファイルは, 以下のような普遍関数で表される.

$$\frac{kz}{u_*} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \phi_{\overline{u}}\left(\frac{z}{L}\right) \quad \frac{kz}{\theta_*} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} = \phi_{\overline{\theta}}\left(\frac{z}{L}\right) \quad \frac{kz}{q_*} \frac{\partial \overline{q}}{\partial z} = \phi_{\overline{q}}\left(\frac{z}{L}\right)$$

実用上はこのような微分型でよりも, 積分形で表現される方が便利である.

$$\overline{u}_2 - \overline{u}_1 = \frac{u_*}{k} \left[ \ln \left( \frac{z_2}{z_1} \right) - \psi_{\overline{u}}(\zeta_2) + \psi_{\overline{u}}(\zeta_1) \right] \quad (39a)$$

$$\overline{\theta}_2 - \overline{\theta}_1 = \frac{\theta_*}{k} \left[ \ln \left( \frac{z_2}{z_1} \right) - \psi_{\overline{\theta}}(\zeta_2) + \psi_{\overline{\theta}}(\zeta_1) \right] \quad (39b)$$

$$\overline{q}_2 - \overline{q}_1 = \frac{q_*}{k} \left[ \ln \left( \frac{z_2}{z_1} \right) - \psi_{\overline{q}}(\zeta_2) + \psi_{\overline{q}}(\zeta_1) \right] \quad (39c)$$

ここで,  $\zeta \equiv z/L$  である. また,

$$\psi_{\overline{x}}(\zeta) \equiv \int_0^\zeta \frac{1 - \phi_{\overline{x}}(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad (40)$$

である.  $z_1$  を地表面 (粗度の高さ) とすると,

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) - \psi_{\bar{u}}(\zeta) + \psi_{\bar{u}}(\zeta_0) \right] \quad (41a)$$

$$\bar{\theta} - \bar{\theta}_s = \frac{\theta_*}{k} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_{0h}} \right) - \psi_{\bar{\theta}}(\zeta) + \psi_{\bar{\theta}}(\zeta_{0h}) \right] \quad (41b)$$

$$\bar{q} - \bar{q}_s = \frac{q_*}{k} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_{0v}} \right) - \psi_{\bar{q}}(\zeta) + \psi_{\bar{q}}(\zeta_{0v}) \right] \quad (41c)$$

となり, 良い近似として  $\psi_{\bar{u}}(\zeta_0) \approx \psi_{\bar{\theta}}(\zeta_{0h}) \approx \psi_{\bar{q}}(\zeta_{0v}) \approx 0$  が用いられる. ここで,  $\zeta_0 \equiv z_0/L$  である.

## 4 分散の相似則

分散またはその  $1/2$  乗である標準偏差は, 注目している量の乱れの強度を表す.

$$\sigma_x \equiv \sqrt{x'x'} \quad (42)$$

ここで,  $x$  は風速の成分 ( $u, v, w$ ) あるいはスカラー量 ( $\theta, q$ ) である. この分散 (標準偏差) についても, これまでと同様に MOS の形式の普遍関数が定義される.

$$\frac{\sigma_w}{u_*} = \phi_w(\zeta) \quad \frac{\sigma_s}{s_*} = \phi_s(\zeta) \quad (43)$$

ここで  $s$  は, スカラー量で  $\theta, q$  あるいは二酸化炭素濃度  $c$  である.

鉛直プロファイルと同様, 中立条件と局所自由対流を考えることによって,  $\phi_w, \phi_\theta, \phi_q$  の関数型を探ることができる. 中立時は, 式 (43) の各式の右边が定数となる. また, 局所自由対流時には  $w_{**}, \theta_{**}, q_{**}$  で無次元化すると定数になる, すなわち,

$$\frac{\sigma_w}{w_{**}} = C_w \quad \frac{\sigma_s}{\theta_{**}} = C_s \quad (44a)$$

これを, 式 (36) を用いて MOS の形に書き直すと,

$$\phi_w(\zeta) = C_w k^{-\frac{1}{3}} (-\zeta)^{\frac{1}{3}} \quad \phi_s(\zeta) = C_s k^{\frac{1}{3}} (-\zeta)^{-\frac{1}{3}} \quad (45a)$$

となる. 表 2 は, このような分散に関する  $\phi$  の振る舞いをまとめたものである.

表 2: 不安定時の分散に関する  $\phi(\zeta)$  の振る舞い

$\zeta$	不安定		中立
	$\zeta \rightarrow -\infty$	$\zeta < 0$	$\zeta = 0$
$\phi_w(\zeta)$	$\sim (-\zeta)^{\frac{1}{3}}$		定数
$\phi_s(\zeta)$	$\sim (-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$		定数

鉛直プロファイルについてと同じく, 分散に関する  $\phi$  を観測データから求めようとする多くの研究が行われてきた (Monji and Businger, 1972; Wyngaard and Coté, 1971; Wyngaard et al., 1971; Högström and Smedman-Högström, 1974; Kader and Yaglom, 1990, など). いくつかの例を, 表 3, 4, 5 にまとめた.



表 3: Empirical forms for  $\phi_w$  in the unstable ASL found in the literature.(constants are adjusted for  $k = 0.4$ ). Adjusted from Asanuma (1996)

Functional form	Range of $z/L$	Reference	Comments
$1.25 \pm 0.03$	neutral	Panofsky and Dutton (1984)	mean of various experiments
$1.8(-\zeta)^{\frac{1}{3}}$	-2; -0.8	Wyngaard et al. (1971)	Kansas Exp.
$2.2(-\zeta)^{\frac{1}{3}}$	-70; -0.6	Monji (1973)	Utah experiment
$1.3(1 - 3\zeta)^{\frac{1}{3}}$	-7; 0	Panofsky et al. (1977)	Minnesota & other aircraft data
$[0.089 + 0.171(-\zeta)^{-\frac{2}{3}}]^{-\frac{1}{2}}$	-2; -0.1	Bradley and Antonia (1979)	ITCE data
1.25	-0.2; 0	Kader and Yaglom (1990)	D-Sublayer.
$2.2(-\zeta)^{\frac{1}{3}}$	-2; -0.2	Kader and Yaglom (1990)	DC-Sublayer.
$1.76(-\zeta)^{\frac{1}{3}}$	-20; -2	Kader and Yaglom (1990)	C-Sublayer.
$1.25(1 - 3\zeta)^{\frac{1}{3}}$	-2; 0	Kaimal and Finnigan (1994)	reexamined Kansas data

水平風速の分散に関する普遍関数  $\phi_u \equiv \sigma_u/u_*$ ,  $\phi_{\bar{q}} \equiv \sigma_v/u_*$  に関しては, 未だに議論の対象となっている. Kansas などの 70 年代の観測結果では, MOS に従った結果が得られず, 長い間  $\sigma_u, \sigma_v$  は MOS に従わないという説が有力であった. Panofsky et al. (1977) は,

$$\frac{\sigma_u}{u_*} = f\left(\frac{h}{L}\right) \quad (46)$$

であるとした. これに対して, Kader and Yaglom (1990) は, MOS に従った  $\phi_u, \phi_v$  を提唱している.

## 5 消散率の相似則

消散率は, 注目している量の乱れの強度が分子粘性によって消滅する割合である. 消散率についても, MOS が適用できる (Wyngaard and Coté, 1971; Brutsaert, 1982).

$$\frac{kz\epsilon}{u_*^3} = \phi_\epsilon(\zeta) \quad \frac{kz\epsilon_s}{u_*s_*^2} = \phi_{\epsilon_s}(\zeta) \quad (47)$$

これらの普遍関数を観測から求める研究も多くなされている (Wyngaard and Coté, 1971; Kader, 1992; Albertson et al., 1996; Kiely et al., 1996).

また,  $\phi_\epsilon, \phi_{\epsilon_s}$  を乱流方程式から求めることも可能である. 水平一様で定常な接地層における乱流エネルギー, スカラー分散の収支方程式は, 以下のように書き換えられる.

$$-\overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{g}{T_a}\overline{w'\theta'_v} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'e'_t} + \frac{1}{\rho}\overline{w'p'}\right) = \epsilon \quad (48a)$$

$$-\overline{w'c'}\frac{\partial \bar{s}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{w's'^2} = \epsilon_s \quad (48b)$$

ここで, 両式ともに  $\frac{\partial}{\partial z}$  の項を無視し, それぞれ  $u_*^3/kz$  と  $kzu_*/(\overline{w'e'_t})^2$  によって無次元化すると,

$$\phi_\epsilon(\zeta) = \phi_{\overline{u}}(\zeta) - \zeta \quad (49a)$$

$$\phi_{\epsilon_s}(\zeta) = \phi_{\bar{s}}(\zeta) \quad (49b)$$

表 4: Empirical forms for  $\phi_\theta$  in the unstable ASL found in the literature (constants are adjusted for  $k = 0.4$ ) Adjusted from Asanuma (1996).

Functional form	Range of $z/L$	Reference	Comments
$0.99(-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$	-2; -0.1	Wyngaard et al. (1971)	Kansas Exp.
$0.92 \pm 0.10(-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$	-70; -0.6	Monji (1973)	Utah Exp.
$0.92(-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$	-6; -0.1	Högström and Smedman-Högström (1974)	Agricultural site
$[-0.22 + 1.28(-\zeta)^{\frac{1}{3}}]^{-1}$	-2; -0.2	Bradley and Antonia (1979)	ITCE data
$[0.032 + 0.509(-\zeta)^{\frac{1}{3}}]^{-1}$	-2; -0.7	Bradley and Antonia (1979)	BOMEX & San Diego
$0.95(-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$	-10; -0.1	Ohtaki (1985)	Wheat field
2.9	-0.2; 0	Kader and Yaglom (1990)	D-Sublayer
$1.0(-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$	-2; -0.2	Kader and Yaglom (1990)	DC-Sublayer
$1.1(-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$	-20; -2	Kader and Yaglom (1990)	C-Sublayer
$0.97(-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$	-2.5; -0.05	Högström (1990)	
$2(1 - 9.5\zeta)^{-\frac{1}{3}}$	-2; 0	Kaimal and Finnigan (1994)	reexamined Kansas data
$1.1(0.085 - \zeta)^{-\frac{1}{3}}$	;	Kustas et al. (1994)	Monsoon '90
$0.97(-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$	-7; -0.5	Albertson et al. (1995)	Owens Valley, CA

となる．今日では，式 (48) において鉛直輸送項， $\frac{\partial}{\partial z}(\cdot)$ ，の役割が無視できないことがわかっており，式 (49) は粗い近似でしかない．

### 5.1 スペクトル，構造関数と消散率

消散率は，風速やスカラー量のスペクトルおよび構造関数を決定するので重要である．風速の成分およびスカラー量の慣性小領域 (高周波側) スペクトルは，以下のように表される．

$$E_u(\kappa) = \alpha_u \epsilon^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}} \quad E_s(\kappa) = \alpha_s \epsilon_s \epsilon^{-\frac{1}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}} \quad (50a)$$

$$E_v(\kappa) = E_w(\kappa) = \frac{4}{3} E_u(\kappa) = \frac{4}{3} \alpha_u \epsilon \kappa^{-\frac{5}{3}} \quad (50b)$$

ここで  $k$  は波数である．式 (50a) の最初の式は Kolmogorov の  $-5/3$  乗則と呼ばれる．式 (50a)–(50b) の  $\alpha_u$  および  $\alpha_s$  は普遍定数であり， $\alpha_u = 0.51 \pm 0.01$ ， $\alpha_\theta = 0.8 \pm 0.1$  (大気境界層乱流，Högström, 1996)， $\alpha_u = 0.52 \pm 0.04$ ， $\alpha_\theta \simeq 0.8$  (高レイノルズ乱流，Sreenivasan, 1995, 1996) という報告がある．

また，構造関数は  $D_{XY}(r) \equiv \overline{[X(x+r) - X(x)][Y(x+r) - Y(x)]}$  のように定義されるが，これもまた消散率を用いて以下のように表される．

$$D_{uu}(r) = K_D \alpha_u \epsilon^{\frac{2}{3}} r^{\frac{2}{3}} \quad D_{ss}(r) = K_D \alpha_s \epsilon_s \epsilon^{-\frac{1}{3}} r^{\frac{2}{3}} \quad (51a)$$

$$D_{vv}(r) = D_{ww}(r) = \frac{4}{3} D_{uu}(r) = \frac{4}{3} K_D \alpha_u \epsilon^{\frac{2}{3}} r^{\frac{2}{3}} \quad (51b)$$

表 5: Empirical forms for  $\phi_q$  in the unstable ASL found in the literature (constants are adjusted for  $k = 0.4$ ). Adjusted from Asanuma (1996).

Functional form	Range of $z/L$	Reference	Comments
$1.04 \pm 0.13(-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$	-5; -0.2	Högström and Smedman-Högström (1974)	Agricultural site
$[0.007 + 0.59(-\zeta)^{\frac{1}{3}}]^{-1}$	-0.8; -0.2	Bradley and Antonia (1979)	ITCE data
$[0.012 + 0.697(-\zeta)^{\frac{1}{3}}]^{-1}$	-2; -0.7	Bradley and Antonia (1979)	BOMEX & San Diego
$1.1(-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$	;	Takeuchi et al. (1980)	cited by Ohtaki (1985)
$1.1(-\zeta)^{-\frac{1}{3}}$	-10; -0.1	Ohtaki (1985)	Wheat field

ここで,  $K_D = (3/2)\Gamma(\frac{1}{3}) \simeq 4.0$  である. 特に,  $C_{XX}^2 = D_{XX}/r^{\frac{2}{3}}$  を構造パラメータという.

$$C_{uu}^2 = K_D \alpha_u \epsilon^{\frac{2}{3}} \quad C_{ss}^2 = K_D \alpha_s \epsilon_s \epsilon^{-\frac{1}{3}} \quad (52)$$

よって構造パラメータの MOS による表記は, 以下の通りとなる.

$$\frac{(kz)^{\frac{2}{3}} C_{uu}^2}{u_*^2} = K_D \alpha_u \left( \frac{kz\epsilon}{u_*^3} \right)^{\frac{2}{3}} = K_D \alpha_u \phi_\epsilon^{\frac{2}{3}} \quad (53)$$

$$\frac{(kz)^{\frac{2}{3}} C_{ss}^2}{s_*^2} = K_D \alpha_s \frac{kz\epsilon_s}{u_* s_*^2} \left( \frac{kz\epsilon}{u_*^3} \right)^{-\frac{1}{3}} = K_D \alpha_s \phi_{\epsilon_s} \phi_\epsilon^{-\frac{1}{3}} \quad (54)$$

## 6 スカラー同士の相似

ボーエン比法の基礎となっているのは, 温度と湿度のような「どのスカラー量が大気乱流によって同様に輸送される」というスカラー同士の相似であり, レイノルズ仮説とも呼ばれる. MOS においては, スカラー量に関する様々な統計値に関する普遍関数,  $\phi_{\bar{s}}, \phi_s, \phi_{\epsilon_s}$  がスカラーの種類によらず同じ関数形を持つことで表現される. すなわち, 温度と比湿を例にとると

$$\phi_{\bar{\theta}}(\zeta) = \phi_{\bar{q}}(\zeta) \quad (55a)$$

$$\phi_{\theta}(\zeta) = \phi_q(\zeta) \quad (55b)$$

$$\phi_{\epsilon_{\theta}} = \phi_{\epsilon_q} \quad (55c)$$

と表すことができる.

これらのスカラー間の相似が実際に成立するかについては, 多くの理論的あるいは実験的な研究が行われている (例えば Warhaft, 1976; Katul et al., 1995; Katul and Hsieh, 1997; Bink and Meesters, 1997; Dias and Brutsaert, 1996; DeBruin et al., 1993, 1999; Asanuma and Brutsaert, 1999a,b).

## 参考文献

- Albertson, J., Kiely, G., and Parlange, M.B. (1996): Surface fluxes of momentum and water vapor. In Raschke, E., editor, *Radiation and Water in the Climate System*, Vol. 45 of *NATO ASI Ser. I*, pp. 59–82. NATO
- Albertson, J.D., Parlange, M.B., Katul, G.G., , Chu, C.R., Stricker, H., and Tyler, S. (1995): Sensible heat flux from arid regions: A simple flux-variance method. *WRR*, **31**(4), pp. 969–973
- Asanuma, J. (1996): Turbulence Variance Characteristics in The Unstable Atmospheric Boundary Layer Above Flat Pine Forest. Ph.D. thesis, Cornell University, Ithaca, NY 14853
- Asanuma, J. and Brutsaert, W. (1999a): The effect of chessboard variability of the surface fluxes on the aggregated turbulence fields in a convective atmospheric surface layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, **91**(1), pp. 37–50
- Asanuma, J. and Brutsaert, W. (1999b): Turbulence variance characteristics of temperature and humidity in the unstable atmospheric surface layer above a variable pine forest. *WRR*, **35**(2), pp. 515–521
- Bink, N. and Meesters, A. (1997): Comment on 'Estimation of surface heat and momentum fluxes using the flux-variance method above uniform and non-uniform terrain' by Katul et al. (1995). *Boundary-Layer Meteorol.*, **84**, pp. 497–502
- Bradley, E. and Antonia, R. (1979): Structure parameters in the atmospheric surface layer. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **105**, pp. 695–705
- Brutsaert, W. (1982): *Evaporation into the Atmosphere*. Springer. 299 pp.
- Brutsaert, W. (1991): The formulation of evaporation from land surfaces. In Bowles, D.S. and O'Connell, P.E., editors, *Recent Advances in the Modeling of Hydrologic Systems*, chapter 4, pp. 67–84. Kluwer Academic Publishers
- Brutsaert, W. (1999): Aspects of bulk atmospheric boundary layer similarity under free-convective conditions. *Reviews of Geophysics*, **37**, pp. 439–451
- Businger, J. (1973): Turbulent transfer in the atmospheric surface layer. In Haugen (1973), pp. 67–100
- Businger, J. (1988): A note on the Businger–Dyer profiles. *Boundary-Layer Meteorol.*, **42**, pp. 145–51
- Businger, J., Wyngaard, J.C., Izumi, Y., and Bradley, E. (1971): Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer. *J. Atmos. Sci.*, **28**, pp. 181–189
- Businger, J. and Yaglom, A. (1971): Introduction to Obukhov's paper on 'turbulence in an atmosphere with a non-uniform temperature'. *Boundary-Layer Meteorol.*, **2**, pp. 3–6

- DeBruin, H., Kohsiek, W., and van Den Hurk, B. (1993): A verification of some methods to determine the fluxes of momentum, sensible heat, and water vapour using standard deviation and structure parameter of scalar meteorological quantities. *Boundary-Layer Meteorol.*, **63**, pp. 231–257
- DeBruin, H., van Den Hurk, B., and Kroon, L. (1999): On the temperature-humidity correlation and similarity. *Boundary-Layer Meteorol.*, **93**(3), pp. 453–468
- Dias, N.L. and Brutsaert, W. (1996): Similarity of scalars under stable conditions. *Boundary-Layer Meteorol.*, **80**, pp. 355–373
- Haugen, D.A., editor (1973): Workshop on Micrometeorology, Boston, MA. Am. Meteorol. Soc.
- Högström, U. (1985): Von Kármán’s constant in atmospheric boundary layer flows: Reevaluated. *J. Atmos. Sci.*, **42**, pp. 263–270
- Högström, U. (1988): Non-dimensional wind and temperature profiles in the atmospheric surface layer: A re-evaluation. *Boundary-Layer Meteorol.*, **42**, pp. 55–78
- Högström, U. (1990): Analysis of turbulent structure in the surface layer with a modified similarity formulation of near neutral conditions. *J. Atmos. Sci.*, **47**, pp. 1949–1972
- Högström, U. (1996): Review of some basic characteristics of the atmospheric surface layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, **78**, pp. 215–246
- Högström, U. and Smedman-Högström, A. (1974): Turbulence mechanisms at an agricultural site. *Boundary-Layer Meteorol.*, **7**, pp. 373–389
- Kader, B. (1992): Determination of turbulent momentum and heat fluxes by spectral methods. *Boundary-Layer Meteorol.*, **61**, pp. 323–347
- Kader, B. and Yaglom, A. (1990): Mean fields and fluctuation moments in unstably stratified turbulent boundary layer. *J. Fluid. Mech.*, **212**, pp. 637–662
- Kaimal, J. and Finnigan, J. (1994): Atmospheric Boundary Layer Flows: Their Structure and Measurement. Oxford University Press, New York
- Katul, G.G., Goltz, S.M., Hsieh, C.I., Cheng, Y., Mowry, F., and Sigmon, J. (1995): Estimation of surface heat and momentum fluxes using the flux-variance method above uniform and non-uniform terrain. *Boundary-Layer Meteorol.*, **74**, pp. 237–260
- Katul, G.G. and Hsieh, C.I. (1997): Reply to the comment by Bink and Meesters. *Boundary-Layer Meteorol.*, **84**, pp. 503–509
- Kiely, G., Albertson, J., Parlange, M.B., and Eichinger, W. (1996): Convective scaling of the average dissipation rate of temperature variance in the atmospheric surface layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, **77**, pp. 267–284
- Kustas, W.P., Blanford, J., Stannard, D., Daughtry, C., Nichols, W., and Wertz, M. (1994): Local energy flux estimates for unstable conditions using variance data in semiarid rangelands. *WRR*, **30**(5), pp. 1351–1361

- Monin, A. and Obukhov, A. (1954): Basic laws of turbulent mixing in the atmospheric mixing layer. *Trudy Inst. Teor. Geofiz. Akad. Nauk SSSR*, **24**(151), pp. 163–187
- Monji, N. (1973): Budgets of turbulent energy and temperature variance in the transition zone from forced to free convection. *J. Meteorol. Soc. Japan*, **51**(2), pp. 133–145
- Monji, N. and Businger, J. (1972): Stability dependent of temperature, humidity and vertical wind velocity variances in the atmosphere surface layer. *J. Meteorol. Soc. Japan*, **50**, pp. 122–130
- Obukhov, A. (1946): Turbulence in thermally inhomogeneous atmosphere. *Trudy Inst. Teor. Geofiz. Akad. Nauk SSSR*, **1**, pp. 95–115. (English Translation in *Boundary-Layer Meteorol.*, **3**, 7–29, 1971)
- Ohtaki, E. (1985): On the similarity in atmospheric fluctuations of carbon dioxide, water vapor and temperature over vegetated fields. *Boundary-Layer Meteorol.*, **32**, pp. 25–37
- Panofsky, H. and Dutton, J. (1984): Atmospheric Turbulence. Wiley, New York, NY
- Panofsky, H., Tennekes, H., Lenschow, D.H., and Wyngaard, J.C. (1977): The characteristics of turbulent components in the surface layer under convective conditions. *Boundary-Layer Meteorol.*, **11**, pp. 355–361
- Sreenivasan, K. (1995): On the universality of the Kolmogorov constant. *Phys. Fluids*, **7**, pp. 2778–2784
- Sreenivasan, K. (1996): The passive scalar spectrum and the Obukhov-Corrsin constant. *Phys. Fluids*, **8**, pp. 189–196
- Takeuchi, K., Ohtaki, E., and Seo, T. (1980): Turbulent transport of water vapor over paddy fields. *Ber. Ohara Inst. Landw. Biol. Okayama Univ.*, **18**, pp. 1–30
- Tennekes, H. (1970): Free convection in the turbulent Ekman layer of the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **27**, pp. 1027–1034
- Tennekes, H. (1973): Similarity laws and scale relations in planetary boundary layers. In Haugen (1973), chapter 5
- Warhaft, Z. (1976): Heat and moisture fluxes in the stratified boundary layer. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **102**, pp. 703–706
- Wyngaard, J.C. (1973): On surface layer turbulence. In Haugen (1973), pp. 101–149
- Wyngaard, J.C. and Coté, O. (1971): The budgets of turbulent kinetic energy and temperature variance in the atmospheric surface layer. *J. Atmos. Sci.*, **28**, pp. 190–201
- Wyngaard, J.C., Coté, O., and Izumi, Y. (1971): Local free convection, similarity and the budgets of shear stress and heat flux. *J. Atmos. Sci.*, **28**(5), pp. 1171–1182