

大気境界層乱流の周波数解析

浅沼 順

平成 19 年 1 月 31 日

目次

第 I 部	スペクトル解析	6
第 1 章	数学的バックグラウンド	7
1.1	フーリエ級数	7
1.1.1	関数の性質	7
1.1.2	三角級数	7
1.1.3	複素フーリエ級数	8
1.2	フーリエ積分	9
1.3	フーリエ変換	10
1.4	自己相関関数	10
第 2 章	パワースペクトル	12
2.1	定義	12
2.1.1	自己相関を用いた定義	12
2.1.2	有限フーリエ変換を用いた定義	12
2.2	パワースペクトルの性質	13
2.3	片側スペクトルと両側スペクトル	14
2.4	スペクトル例題	15
2.4.1	正弦波	15
2.4.2	白色雑音	15
第 3 章	相互相関関数とクロススペクトル	17
3.1	相互相関関数	17
3.2	クロススペクトル	17
3.3	コスペクトルとクオドラチャスペクトル	18
3.4	コヒーレンスとフェーズ	19
第 4 章	離散フーリエ変換	21
4.1	フーリエ変換の離散化	21
4.2	逆フーリエ変換の離散化	23
第 5 章	FFT を利用したスペクトルの計算	24
5.1	FFT ソフトウェア	24
5.2	FFT によるスペクトル計算の手順	24
5.2.1	データのトレンド除去	24
5.2.2	窓関数の適用	25
5.2.3	データ数の決定	25
5.2.4	FFT による生のスペクトル計算	26

5.2.5	生スペクトルの平滑化・アンサンブル平均	27
5.2.6	スペクトルのグラフ表現	27
第 II 部 大気境界層乱流のスペクトル解析		29
第 6 章	乱流のスペクトル解析	30
6.1	3 次元空間でのスペクトル	30
6.1.1	3 次元スペクトル	30
6.1.2	一次元スペクトル	31
6.2	時間, 距離そして凍結乱流仮説	31
6.3	エネルギーカスケードと 3 つの周波数領域	32
6.3.1	エネルギー保有領域	33
6.3.2	消散領域	33
6.3.3	慣性小領域	33
第 7 章	大気境界層乱流のスペクトル	34
7.1	接地層	34

目 次

1.1	矩形波の三角級数による近似	7
1.2	自己相関関数と積分スケール (Tennekes and Lumley, 1972, より)	11
3.1	温度 T と比湿 q の間のクロススペクトルに関連した量. チベット高原上での観測で, 温度は超音波風速計, 比湿は Vaisala 社製 Humicap で計測した. Humicap は高周波 (0.1Hz 以上) での応答が十分ではないことに注意. (a) コスペクトル $C_{Tq}(f)$ とクアドラチャスペクトル $Q_{Tq}(f)$. (b) $\sqrt{S_T(f)S_q(f)}$ で無次元化したコスペクトル $C_{Tq}(f)$ とクアドラチャスペクトル $Q_{Tq}(f)$, およびコヒーレンス. (c) フェーズ $\theta_{Tq}(F)$	20
5.1	FFT プログラムを用いたスペクトル計算の手順	25
5.2	窓関数とその周波数特性	26
5.3	FFT によって計算された生のスペクトルとブロック平均を取ったスペクトル . . .	27
5.4	両対数グラフにおけるスペクトルの表現	28
6.1	エネルギーカスケードの概念 (Kaimal and Finnigan, 1994, より)	32
7.1	接地層における風速・温度変動のスペクトルの無次元表示 (Kaimal and Finnigan, 1994, より).	34

表 目 次

1.1 時間・空間の変数	10
2.1 両側スペクトルと片側スペクトル	14

前言

内容

1. 数学的バックグラウンド
 - (a) Fourier 級数
 - (b) Fourier 積分・Fourier 変換
 - (c) 自己相関関数・構造関数
 - (d) パワースペクトル
2. 大気境界層への応用
 - 接地層
 - 混合層
 - コルモゴロフ ($-5/3$ 乗則)
 - 消散率
3. (番外編)Wavelet 変換

参考書

スペクトル解析一般に関する教科書としては、以下のものが挙げられる。

- 「スペクトル解析」 日野幹雄著 朝倉書店. (日野, 1977)
- 「Random Data Analysis and Measurement Procedure」 3rd edition, by J. Bendat and A. Piersol, 2000, Wiley Inter-sci. (Bendat and Piersol, 1971)

また、乱流現象のスペクトル解析や大気境界層乱流のスペクトル解析結果に関する教科書としては、以下のものが挙げられる。

- 「Atmospheric Boundary Layer Flows」 by Kaimal and Finnigan, Oxford Univ. Press, 1994 (Kaimal and Finnigan, 1994).
- 「A First Course in Turbulence」 by H. Tennekes and J. Lumley, MIT Press, 1972. (Tennekes and Lumley, 1972)

第I部

スペクトル解析

第1章 数学的バックグラウンド

1.1 フーリエ級数

1.1.1 関数の性質

$$f(-x) = f(x) \quad \text{偶関数} \quad (1.1a)$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{奇関数} \quad (1.1b)$$

$$f(x + \tau) = f(x) \quad \text{周期関数} \quad (1.1c)$$

1.1.2 三角級数

周期 2π の矩形波 $f(x)$ を三角関数列 $\sum_0^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ で表すことを考える.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.2)$$

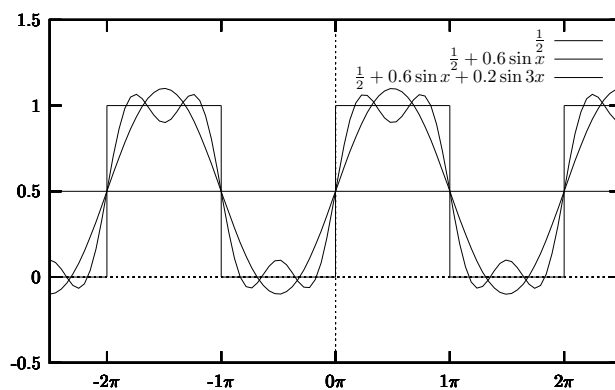


図 1.1: 矩形波の三角級数による近似

a_n, b_n は以下の式を用いて決定される.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \geq 1 \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases} \quad (1.3a)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \geq 1 \end{cases} \quad (1.3b)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad \text{for all } m, n \quad (1.3c)$$

このような性質を満たすことから, $\cos nx$ および $\sin nx$ は直交関数である. また, $n = m$ の時に積分が 1 であるならば, 正規直交関数と呼ばれる. 上の例では, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$ が正規直交関数である.

式 (1.2) の両辺に 1, $\cos mx, \sin mx$ を乗じて, それぞれを $-\pi$ から π まで積分すると,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2} 2\pi + 0 + 0 + \cdots \quad (1.4a)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = 0 + \cdots + 0 + a_m \pi + 0 + \cdots \quad (1.4b)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = 0 + \cdots + 0 + b_m \pi + 0 + \cdots \quad (1.4c)$$

すなわち

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.5a)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.5b)$$

式 (1.5b) をオイラーの定理, a_n, b_n をフーリエ係数, 式 (1.2) をフーリエ級数と呼ぶ.

周期が 2π ではなく, 一般的に 2ℓ である時は, 以下のように拡張される.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad (1.6a)$$

ここで

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.6b)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.6c)$$

1.1.3 複素フーリエ級数

式 (1.6) のフーリエ級数を三角関数と指数関数の関係

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned} \quad (1.7)$$

を用いて単純化する．ここで， $i \equiv \sqrt{-1}$ である．式 (1.7) を式 (1.6) の各式に代入すると

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi x/\ell} \quad (1.8a)$$

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-in\pi x/\ell} dx \quad (1.8b)$$

1.2 フーリエ積分

周期性の無い一般の関数をフーリエ級数展開するには，その関数が無限大の周期を持った周期関数であると考えれば良い．すなわち，式 (1.6) において $\ell \rightarrow \infty$ を考えることになる．

式 (1.6) を書き直すと

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\zeta) d\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\zeta) \cos \frac{k\pi}{\ell} (\zeta - x) d\zeta \quad (1.9)$$

となる．このうち右辺第 1 項は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\zeta)| d\zeta < M \quad (1.10)$$

となる任意の M が存在するならば， $\ell \rightarrow \infty$ に対して 0 に収束する．

また右辺第 2 項は $\Delta\omega \equiv \pi/\ell$ とすると，

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(\zeta) \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\omega \cos k\Delta\omega (\zeta - x) d\zeta \quad (1.11)$$

$\ell \rightarrow \infty$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta\omega \cos k\Delta\omega (\zeta - x) \rightarrow \int_0^{\infty} \cos \omega (\zeta - x) d\omega \quad (1.12)$$

となる．よって，式 (1.10) となる M が存在すれば，

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \cos \omega (\zeta - x) d\zeta \quad (1.13)$$

これは，式 (1.6) の形式に直すと，

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x] d\omega \quad (1.14a)$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \quad (1.14b)$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx \quad (1.14c)$$

また，複素数表示では，

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) e^{-i\omega \zeta} d\zeta \quad (1.15)$$

となる．

元の変数	変換後の変数		
時間	周期	周波数	角周波数 (角速度)
t	T	$f = 1/T$	$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$
距離	波長	波数	
x	λ	$\kappa = 1/\lambda$	

表 1.1: 時間・空間の変数

1.3 フーリエ変換

$$\hat{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (1.16)$$

とすると、式 (1.15) は、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (1.17)$$

となる。 $\hat{f}(\omega)$ は $f(x)$ のフーリエ変換と呼ばれる。

式 (1.16), (1.17) のペアは、 x が時間 t ならば $\omega = 2\pi f$ より

$$\begin{cases} \hat{f}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi f t} dt \\ f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i2\pi f x} df \end{cases} \quad (1.18)$$

ここで、 f は周波数である。また x が空間上の距離ならば、

$$\begin{cases} \hat{f}(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi \kappa x} dx \\ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i2\pi \kappa x} dk \end{cases} \quad (1.19)$$

ここで、 κ は波数である。

1.4 自己相関関数

ある変数 u の 2 つの時刻での値、 $u(t)$ と $u(t')$ の相関 $\overline{u(t)u(t')}$ は、自己相関（関数） (autocorrelation) と呼ばれ、 u が統計的な安定性を持てば、 t と t' の距離 τ のみに依存する。

$$R_u(\tau) \equiv \overline{u(t)u(t+\tau)} \quad (1.20)$$

ここで $\bar{\cdot}$ は平均を表す。当然、 $R(0) = \overline{u(x)^2}$ は分散であり、自己相関は分散 $R_u(0)$ で無次元化され、

$$\rho_u(\tau) \equiv \frac{R(\tau)}{R(0)} = \frac{\overline{u(t)u(t+\tau)}}{\overline{u^2}} \quad (1.21)$$

を自己相関係数と呼ぶ。 $\rho_u(0) = 1$ である。定義から、

$$R_u(-\tau) \equiv \overline{u(t)u(t-\tau)} = \overline{u(t+\tau)u(t)} = R_u(\tau) \quad (1.22)$$

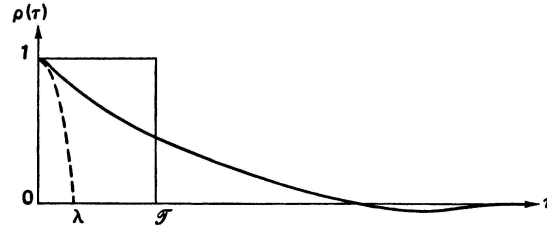


Figure 6.10. Sketch of an autocorrelation coefficient.

図 1.2: 自己相関関数と積分スケール (Tennekes and Lumley, 1972, より)

自己相関関数／係数は $r = 0$ で最大値を取る偶関数である。

自己相関関数が最初に 0 になる距離は、2 点の現象が無相関になる距離であり、現象の代表的な空間的なスケールの一つである。その大まかな見積もりとして積分スケール Λ を用いることがある。

$$\Lambda_u \equiv \int_0^\infty \rho_u(\tau) d\tau \quad (1.23)$$

自己相関関数／係数と類似したものに構造関数があり乱流力学の世界でよく用いられる。2 次構造関数は以下のように定義される。

$$D_u(\tau) \equiv \overline{[u(t + \tau) - u(t)]^2} \quad (1.24)$$

これは以下の式から自己相関と関係がある。

$$D_u(\tau) \equiv \overline{[u(t + \tau) - u(t)]^2} = 2R_u(0) - 2R_u(\tau) \quad (1.25)$$

また、地球統計学 (Geostatistics) では、 $D_u(\tau)$ をヴァリオグラム (Variogram), $D_u(\tau)/2$ をセミヴァリオグラム (Semivariogram) と呼ぶ。

第2章 パワースペクトル

2.1 定義

スペクトル密度関数は3つの異なる方法で定義される。

1. 自己相関を用いた定義
2. 有限のフーリエ変換を用いた定義
3. フィルター・方形・平均手法による定義

これら3つは、お互いに同等であることを示すことができる (Bendat and Piersol, 1971)。ここでは、前2者を取り上げる。

2.1.1 自己相関を用いた定義

パワースペクトル密度関数 (spectral density function) の第1の定義は、自己相関関数のフーリエ変換として、

$$S_u(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} R_u(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.1)$$

この逆フーリエ変換は、

$$R_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(f) e^{i2\pi ft} df \quad (2.2)$$

となり、式 (2.1) と (2.2) の関係を Wiener-Khinchine の公式と呼ぶ。式 (2.2) より、 $R_u(0) = \overline{u(t)^2}$ であることから、

$$\overline{u(t)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(f) df \quad (2.3)$$

となる。式 (2.3) は、スペクトル密度関数の重要な性質を表す。すなわち、スペクトル密度関数 $S_u(f)$ は、変動 $\overline{u^2}$ の各周波数 f における寄与を表す。

2.1.2 有限フーリエ変換を用いた定義

変数 $u(t)$ が $0 \leq t \leq T$ で定義され、これ以外の区間では $u(t) = 0$ となる変量であるとする。 $u(t)$ のフーリエ変換 $\hat{u}(f)$

$$\hat{u}(f) = \int_0^T u(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.4)$$

を用いて、有限フーリエ変換を用いたスペクトル密度関数の定義は以下の通りとなる。

$$S_u(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} |\hat{u}(f)|^2 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \hat{u}(f) \hat{u}^*(f) \right] \quad (2.5)$$

$|\hat{u}(f)|^2$ は、周波数 f における $u(t)$ の変動の強さである。 $u(t)$ が確率変数の場合は、 $|\hat{u}(f)|^2$ の期待値 $E[|\hat{u}(f)|^2]$ を用い、

$$S_u(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} |\hat{u}(f)|^2 \right] \quad (2.6)$$

のようになる。

スペクトル密度関数の二つの定義、式 (2.1) と式 (2.5) が同等であることを示す。自己相関関数の定義、式 (1.20) を書き直すと、

$$R_u(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t+\tau)dt \quad (2.7)$$

となる。式 (2.4) の逆フーリエ変換、

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(f)e^{i2\pi ft}df \quad (2.8)$$

を式 (2.7) に代入し、積分順序を入れ替えると、

$$\begin{aligned} R_u(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(f)e^{i2\pi f(t+\tau)}df \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(f)e^{i2\pi ft}df \int_0^T u(t)e^{i2\pi f\tau}dt \end{aligned}$$

ここで、 $u(t)$ が $0 \leq t \leq T$ 以外で 0 であることから、上式右辺の積分範囲 $0 \leq t \leq T$ は $-\infty \leq t \leq \infty$ としても良いことになる。よって、式 (2.4) の複素共役を用いれば、

$$R_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\hat{u}(f)\hat{u}^*(f)}{T} \right] e^{i2\pi ft}df \quad (2.9)$$

となる。 $R_u(0) = \overline{u(t)^2}$ を利用して、

$$\overline{u(t)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\hat{u}(f)\hat{u}^*(f)}{T} \right] df \quad (2.10)$$

となり、式 (2.3) と比較すると、式 (2.5) を得る。

$$S_u(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\hat{u}(f)\hat{u}^*(f)}{T}$$

2.2 パワースペクトルの性質

$S_u(f)$ の性質を調べると、

$$S_u(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_u(t)e^{i2\pi ft}dt = S_u^*(f)$$

ここで、 $S_u^*(f)$ は $S_u(f)$ の複素共役である。また、 $R_u(t)$ は偶関数であることから、

$$S_u(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_u(t)e^{i2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} R_u(-t)e^{-i2\pi f(-t)}d(-t) = S_u(f)$$

よって

$$S_u(-f) = S_u^*(f) = S_u(f) \quad (2.11)$$

となり, $S_u(f)$ は, f の実の偶関数である. $R_u(t) \in \mathbb{R}$ であるので式 (2.1) は, 単純に以下のように表すこともできる.

$$S_u(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_u(t) \cos(2\pi ft) dt = 2 \int_0^{\infty} R_u(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (2.12)$$

同様に,

$$R_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(f) \cos(2\pi ft) df = 2 \int_0^{\infty} S_u(f) \cos(2\pi ft) df \quad (2.13)$$

となる.

2.3 片側スペクトルと両側スペクトル

	両側スペクトル	片側スペクトル
記号	$S_u(f)$	$G_u(f)$
定義域	$(-\infty, \infty)$	$(0, \infty)$
	$S_u(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_u(t) e^{-i2\pi ft} dt$	$G_u(f) = 2 \int_0^{\infty} R_u(t) e^{-i2\pi ft} dt$
	$= 2 \int_0^{\infty} R_u(t) \cos(2\pi ft) dt$	$= 4 \int_0^{\infty} R_u(t) \cos(2\pi ft) dt$
	$R_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(f) e^{i2\pi ft} df$	$R_u(t) = \mathcal{R} \left[\int_0^{\infty} G_u(f) e^{i2\pi ft} df \right]$
	$= 2 \int_0^{\infty} S_u(f) \cos(2\pi ft) df$	$= \int_0^{\infty} G_u(f) \cos(2\pi ft) df$
	$\overline{u(t)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(f) df$	$\overline{u(t)^2} = \int_0^{\infty} G_u(f) df$

表 2.1: 両側スペクトルと片側スペクトル

上記では, パワースペクトル $S_u(f)$ を周波数 f の $-\infty < f < \infty$ の範囲で定義されていたが, 現実の応用では $0 \leq f < \infty$ の範囲で定義する方が実用的である. このような範囲で定義するスペクトルを片側スペクトル (One-sided Spectrum) と呼びここでは $G_u(f)$ と記し, 両側スペクトル (Two-sided Spectrum) $S_u(f)$ と区別する. $G_u(f)$ は,

$$\overline{u(t)^2} = \int_0^{\infty} G_u(f) df \quad (2.14)$$

を満たすことから, S_u と G_u の関係は

$$G_u(f) = 2S_u(f) \quad \text{for } 0 < f < \infty \quad (2.15)$$

となる．片側スペクトルに関する，式 (2.1),(2.2) は以下のように表される．

$$\begin{aligned} G_u(f) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_u(t) e^{-i2\pi ft} dt \\ &= 4 \int_0^{\infty} R_u(t) \cos(2\pi ft) dt \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} R_u(f) &= \mathcal{R} \left[\int_0^{\infty} G_u(f) e^{i2\pi ft} df \right] \\ &= \int_0^{\infty} G_u(f) \cos(2\pi ft) df \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.4 スペクトル例題

2.4.1 正弦波

単純な正弦波のスペクトルについて考えてみよう． $u(t)$ を

$$u(t) = a_0 \sin 2\pi f_0 t \quad (2.18)$$

とする．周期は $T = 1/f_0$ である，自己相関は，周期 n 個分の平均をとることで，

$$R_u(\tau) = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} u(t)u(t+\tau)dt = \frac{a^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau \quad (2.19)$$

となる．このフーリエ変換を求めると，

$$\begin{aligned} S_u(f) &= \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f t) dt \\ &= \frac{a^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \{\cos[2\pi(f_0 + f)t] + \cos[2\pi(f_0 - f)t]\} dt \\ &= \frac{a^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \end{aligned} \quad (2.20)$$

となる．ここで， $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数である．式 (2.3) を確認しよう．正弦波の分散は，

$$\overline{u(x)^2} = R_u(0) = \frac{a^2}{2} \quad (2.21)$$

となる．スペクトルの積分は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_u(f) df = \frac{a^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] df = \frac{a^2}{2} \quad (2.22)$$

となるので，分散に等しい．

2.4.2 白色雑音

ランダムな変動の繰り返しは周波数特性を持たず，白色雑音 (white noise) と呼ばれる．白色雑音の自己相関 $R_u(t)$ は， $t > 0$ において $R_u(t) = 0$ と考えられる．よって，

$$R_u(t) = c\delta(t) \quad (2.23)$$

Box 1 Dirac のデルタ関数

任意の関数 $f(x)$ について以下の関係式を満たす関数を Dirac のデルタ関数と呼ぶ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

デルタ関数は以下のような性質を持つ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) f(x) dx = f(\xi)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) dx = 1$$

$$\frac{d}{dx} H(x) = \delta(x)$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (\delta(x) \text{ は偶関数})$$

ここで $H(x)$ はステップ関数で

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

で定義される.

と表される. 白色雑音のスペクトルは,

$$S_u(f) = c \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i2\pi f t} dt = c \quad (2.24)$$

となり, 一定値をとることがわかる.

第3章 相互相関関数とクロススペクトル

自己相関とスペクトルの2変数への拡張が相互相関とクロススペクトルである。スペクトルが自己相関のフーリエ変換として定義されたように、クロススペクトルは、相互相関のフーリエ変換として定義される。

3.1 相互相関関数

相互相関 (cross-correlation) は二つの信号 $u(t), v(t)$ の時間変化の相互関係を表す。相互相関関数 R_{uv} , 相互相関係数 ρ_{uv} は以下のように定義される

$$R_{uv}(\tau) \equiv \overline{u(t)v(t+\tau)} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \rho_{uv}(\tau) &\equiv \overline{u(t)v(t+\tau)} / \sqrt{\overline{u^2}} \sqrt{\overline{v^2}} \\ &= R_{uv}(\tau) / \sqrt{\rho_u(0)\rho_v(0)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

自己相関と異なり、相互相関では $\tau = 0$ での対称性はなく、その代わり以下のような関係が成り立つ。

$$\rho_{uv}(\tau) = \rho_{vu}(-\tau) \quad (3.3)$$

3.2 クロススペクトル

クロススペクトル密度関数 (cross-spectral density function) S_{uv} は、相互相関関数のフーリエ変換として定義される。

$$S_{uv}(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} R_{uv}(\tau) e^{-2i\pi f\tau} d\tau \quad (3.4)$$

$$R_{uv}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} S_{uv}(f) e^{2i\pi f\tau} df \quad (3.5)$$

また、スペクトルと同じように有限フーリエ変換を用いて、クロススペクトルを定義することもできる。 $u(t)$ と $v(t)$ が $0 \leq t \leq T$ 以外で0であるならば、上記の定義は以下のように書き換えることができる。

$$S_{uv}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \hat{u}^*(f) \hat{v}(f) \right] \quad (3.6)$$

あるいは、アンサンブル平均 $E[\cdot]$ を用いて、

$$S_{uv}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \hat{u}^*(f) \hat{v}(f) \right] \quad (3.7)$$

と表される。

クロススペクトルの性質をいくつか見てみよう．式 (3.5) で $\tau = 0$ とすると

$$R_{uv}(0) = \overline{uv} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{uv}(f) df \quad (3.8)$$

となるので，クロススペクトルを全周波数領域について積分すると，共分散になる．また，対称性は，

$$S_{uv}(-f) = S_{uv}^*(f) = S_{vu}(f) \quad (3.9)$$

となり，クロススペクトル密度関数は複素関数であることがわかる．

3.3 コスペクトルとクオドラチャスペクトル

クロススペクトルの実部と虚部をそれぞれ $C_{uv}(f), Q_{uv}(f)$ で表すと，

$$S_{uv}(f) = C_{uv}(f) - iQ_{uv}(f) \quad (3.10)$$

となる．ここで $C_{uv}(f)$ をコスペクトル (coincident spectral density function, co-spectrum), $Q_{uv}(f)$ をクオドラチャスペクトル (quadrature spectral density function, quad-spectrum) とよぶ.¹

式 (3.5) に式 (3.10) を代入し実部を取ると，

$$R_{uv}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [C_{uv}(f) \cos 2\pi f\tau + Q_{uv}(f) \sin 2\pi f\tau] df \quad (3.11)$$

を得る． $\tau = 0$ とすると，

$$R_{uv}(0) = \overline{uv} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{uv}(f) df \quad (3.12)$$

となり，コスペクトルの全周波数積分が共分散となることがわかる．式 (3.8) と比較すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_{uv}(f) df = 0 \quad (3.13)$$

となることがわかる．

また，式 (3.4) より，

$$\begin{aligned} C_{uv}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{uv}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau \\ &= \int_0^{\infty} [R_{uv}(\tau) + R_{vu}(\tau)] \cos 2\pi f\tau d\tau \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} Q_{uv}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{uv}(\tau) \sin 2\pi f\tau d\tau \\ &= \int_0^{\infty} [R_{uv}(\tau) - R_{vu}(\tau)] \sin 2\pi f\tau d\tau \end{aligned} \quad (3.15)$$

となるので，

$$C_{uv}(-f) = C_{uv}(f) \quad (3.16)$$

$$Q_{uv}(-f) = -Q_{uv}(f) \quad (3.17)$$

となり，コスペクトルは偶関数，クオドラチャスペクトルは奇関数であることがわかる．

¹Bendat and Piersol (1971) では， $C_{uv}(f), Q_{uv}(f)$ は片側クロススペクトル関数 $G_{uv}(f) = 2S_{uv}(f)$ ($f > 0$) の実部，虚部として定義されている．

3.4 コヒーレンスとフェーズ

コスペクトルとクオドラチャスペクトルから，クロススペクトルの絶対値は以下のように表される．

$$|S_{uv}(f)| = \sqrt{C_{uv}^2(f) + Q_{uv}^2(f)} \quad (3.18)$$

また，以下のようにフェーズ (phase angle) を定義すると，

$$\theta_{uv}(f) \equiv \tan^{-1} \frac{Q_{uv}(f)}{C_{uv}(f)} \quad (3.19)$$

クロススペクトル $S_{uv}(f)$ は

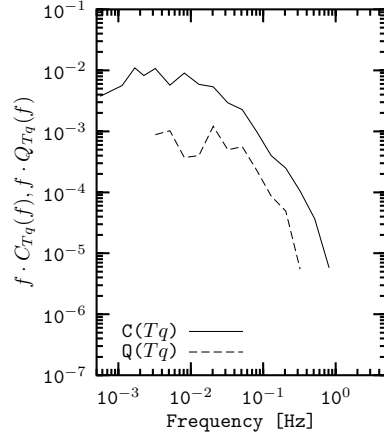
$$S_{uv}(f) = |S_{uv}(f)|e^{-i\theta_{uv}(f)} \quad (3.20)$$

のように極座標表示することができる．

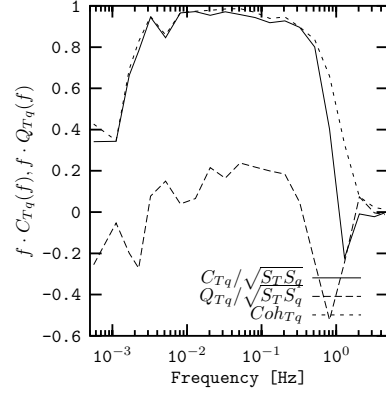
また，コヒーレンス $coh(f)$ は以下のように定義される．

$$coh^2(f) = \frac{|S_{uv}(f)|^2}{S_u(f)S_v(f)} \quad (3.21)$$

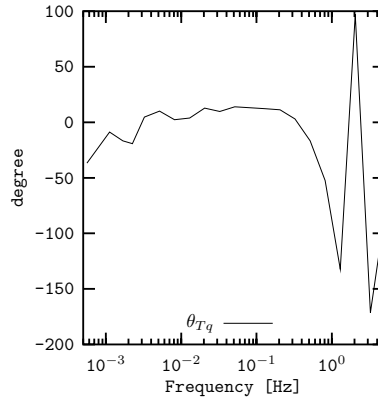
図 3.1 にコスペクトル，クオドラチャスペクトル，コヒーレンス，フェーズなどの計算例を示す．



(a) コスペクトル $C_{Tq}(f)$ とクアドラチャスペクトル $Q_{Tq}(f)$



(b) 無次元化した $C_{Tq}(f)$ と $Q_{Tq}(f)$ およびコヒーレンス $coh_{Tq}(f)$



(c) フェーズ $\theta_{Tq}(f)$

図 3.1: 温度 T と比湿 q の間のクロススペクトルに関連した量. チベット高原上での観測で, 温度は超音波風速計, 比湿は Vaisala 社製 Humicap で計測した. Humicap は高周波 (0.1Hz 以上) で
の応答が十分ではないことに注意. (a) コスペクトル $C_{Tq}(f)$ とクアドラチャスペクトル $Q_{Tq}(f)$.
(b) $\sqrt{S_T(f)S_q(f)}$ で無次元化したコスペクトル $C_{Tq}(f)$ とクアドラチャスペクトル $Q_{Tq}(f)$, およ
びコヒーレンス. (c) フェーズ $\theta_{Tq}(F)$.

第4章 離散フーリエ変換

自然界の現象は無限に続きかつ連続的であるが、一般にはこれを A/D 変換器などを通してデジタルサンプリングを行い、離散的なデジタルデータに対してフーリエ変換を行うという手順を取ることが一般的である。よって、これまで示してきたような連続的な表現から、離散的な表現を導き出すことが必要となる。

4.1 フーリエ変換の離散化

変数 $u(t)$ が $0 \leq t \leq T$ 以外でゼロであるとする。これは式 (2.5) を用いてスペクトルを計算するときに必要な仮定であるが、自然現象から時間 T の期間、観測を行ったことに相当する。これは、元の変数 $u_0(t)$ に矩形ウィンドウ $w_T(t)$ をかけたことに他ならない。

$$u(t) = u_0(t)w_T(t)$$

ここで,

$$w_T(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (4.1)$$

となる矩形ウィンドウである。

時間間隔 Δt で N 回サンプリングしデジタル化したとすると、時間に関する諸条件は以下の通りとなる。

$$\Delta t = T/N \quad (4.2a)$$

$$t = j\Delta t \quad (j = 0, 1, \dots, N-1) \quad (4.2b)$$

$$u(t) = u(j\Delta t) \equiv u_j \quad (4.2c)$$

また周波数に関する諸条件は、

$$\Delta f = 1/T \quad (4.3a)$$

$$f = k\Delta f = k/T \quad (k = 0, \dots, N-1) \quad (4.3b)$$

$$\hat{u}(f) = \hat{u}(k\Delta f) \equiv \hat{u}_k \quad (4.3c)$$

で与えられる。このような条件のもと $u(t)$ のフーリエ変換、

$$\hat{u}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_0^T u(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

を離散化すると,

$$\begin{aligned}
\hat{u}_k &= \sum_{j=0}^{N-1} u_j \exp(-i2\pi k \Delta f j \Delta t) \Delta t \\
&= \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} u_j \exp\left(-i2\pi \frac{jk}{N}\right) \\
&= \frac{T}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j \exp\left(-i2\pi \frac{jk}{N}\right) \quad (k = 0, \dots, N-1)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

を得る. 式 (4.4) を離散フーリエ変換と呼ぶ.

フーリエ変換の離散化表現において, 時間領域での離散化条件 (式 (4.2)) はサンプリング時の条件によって直接決定されるが, 周波数領域での離散化条件 (式 (4.3)) は, 2 次的に決定される. すなわち, 式 (4.4) の導出において Δf の選択は任意であり,

$$\hat{u}_k = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} u_j \exp\left(-i2\pi \frac{jk \Delta f T}{N}\right)$$

より, 任意の $f = k \Delta f$ に対して $\hat{u}(f)$ を求めることが可能である. しかしながら求めた \hat{u}_k は全てが独立であるとは限らない. N 個の $u_j (j = 0, \dots, N-1)$ からは, N 個の独立な \hat{u}_k しか得られないのである. ナイキスト周波数 $f_N \equiv 1/(2\Delta t)$ を用いると \hat{u}_k が定義される周波数範囲は,

$$|f| \leq f_N \tag{4.5}$$

で表されるから, この区間を N 個に分割し $\Delta f = 2f_N/N = 1/T$ とすれば, 互いに独立な \hat{u}_k を N 個得ることができ, 最も効率のよい Δf の選択である. このとき, k の取り得る値は,

$$-N/2 \leq k \leq N/2$$

である. 一方, 離散フーリエ変換 (式 (4.4)) は,

$$\hat{u}_{k+N} = \frac{T}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j \exp\left(-i2\pi \frac{j(k+N)}{N}\right) = \hat{u}_k \tag{4.6}$$

から周期 N の周期性を持つ. これは離散化による副産物である. これから, $\hat{u}_{-N/2} = \hat{u}_{N/2}$ であり, $\hat{u}_k (k = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2)$ のうち, 実際に独立なのは N 個である. また, 周期性を利用して k の範囲を

$$0 \leq k \leq N-1$$

として良いことがわかる. また, $u(t)$ が実数ならば, フーリエ変換では $\hat{u}(-f) = \hat{u}(f)^*$ ($u(t) \in \mathfrak{R}$ のとき) が成り立つので, 離散形においても

$$\hat{u}_{-k} = \hat{u}_k^* \quad (\text{if } u_j \in \mathfrak{R}) \tag{4.7}$$

が成立する. よって $N/2 + 1 \leq k \leq N-1$ の区間は, 偶関数であるスペクトルの $f < 0$ の部分を構成するだけである. よって, スペクトルを計算するという目的では,

$$0 \leq k \leq N/2$$

の範囲の計算が行われれば必要十分である.

4.2 逆フーリエ変換の離散化

逆フーリエ変換,

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(f) e^{i2\pi ft} df$$

の離散化表現は,

$$\begin{aligned} u_j &= \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k \exp(i2\pi k \Delta f j \Delta t) \Delta f \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k \exp\left(i2\pi \frac{jk}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k \exp\left(i2\pi \frac{jk}{N}\right) \quad (j = 0, 1, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (4.8)$$

と表され, 離散逆フーリエ変換と呼ばれる. 離散形のフーリエ・逆フーリエ変換は

$$\hat{u}_k = \frac{T}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j \exp\left(-i2\pi \frac{jk}{N}\right) \quad (k = 0, \dots, N-1) \quad (4.4)'$$

$$u_j = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k \exp\left(i2\pi \frac{jk}{N}\right) \quad (j = 0, \dots, N-1) \quad (4.8)'$$

となる. 一般に FFT などのフーリエ変換プログラムなどでは, $\Delta t = 1$ として,

$$\hat{u}_k = \sum_{j=0}^{N-1} u_j \exp\left(-i2\pi \frac{jk}{N}\right) \quad (4.4)''$$

$$u_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k \exp\left(i2\pi \frac{jk}{N}\right) \quad (4.8)''$$

を計算する. またソフトウェアによっては, (4.8)'' 中の $1/N$ を省略しているものもあり, 注意が必要である.

第5章 FFT を利用したスペクトルの計算

FFT(Fast Fourier Transform) は、離散フーリエ変換を高速に計算するプログラムであり、これを利用して、式 (2.5) からスペクトルの推定を行うことができる。

5.1 FFT ソフトウェア

Fortran, C など無料で利用できる FFT 計算用の関数・サブルーティンの代表的なものとして以下のようなものがある。

FFTW (C) 自称世界最速 FFT サブルーティン。データ数が 2^n で無くとも計算できる、速いことはいいことだ、で筆者愛用。 (URL: <http://www.fftw.org>)。

fftpack (C,Fortran) NCAR 開発。Netlib にも登録されており、Lapack (代表的な線形代数用パッケージ) 等とも整合性が良い？ (未確認) (URL: <http://www.netlib.org/fftpack/>)

Numerical Recipes のサブルーティン (C,C++,Fortran,Pascal) 書籍”Numerical Recipes in C/ Fortran/ C++/Pascal”(Press et al., 1992) 掲載のサブルーティン。この書籍は、線形代数、数値微分・積分などの様々な数学用サブルーティンを掲載している。特に解説部分が充実しており、一般的な数学計算に関する教科書としても、非常に有用である。米国大学生御用達。掲載サブルーティンのファイルは、購入すれば手に入る。

また、Mathematica, Matlab, Labview, Maple 等のような市販の数学計算ソフトにも標準・オプションで FFT 計算ルーティンが組み込まれていることが多い。

どのようなサブルーティンを使用するときにも重要なことは、離散フーリエ・離散逆フーリエ変換 (式 (4.4),(4.8)) のどの部分を実際に計算しているか、スペクトル計算ルーティンがどのような窓関数を使用しているか等、ルーティン毎に異なるので、解説を理解した上で使用することが望ましい。

5.2 FFT によるスペクトル計算の手順

FFT ルーティンを用いた実際のスペクトル計算は、図 5.1 のような手順を踏むことになる (Kaimal and Finnigan, 1994; 日野, 1977)。以下、順を追って説明していく。

5.2.1 データのトレンド除去

フーリエ変換は、データ・関数を正弦・余弦関数の集合に分解するので、定常を仮定している。よって、元のデータにトレンドが含まれる場合は、これを除去することが必要となる。除去方法としては、線形回帰による線形トレンドの除去、数値フィルターによるもの等があるが (Kaimal and Finnigan, 1994, 第 7 章参照)、それぞれ一長一短である。

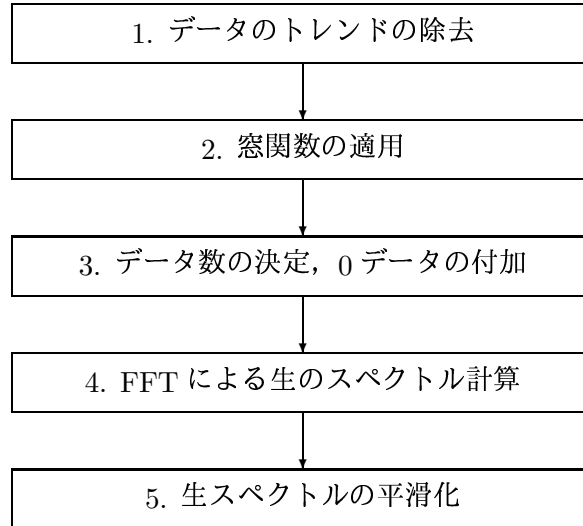


図 5.1: FFT プログラムを用いたスペクトル計算の手順

5.2.2 窓関数の適用

上にも述べたように, 有限時間長 $0 \leq t \leq T$ のデータにフーリエ変換を掛けるということ無限長の実際のデータに矩形の窓関数を施すことに他ならない (式 (4.1)). よって, 実際には

$$\hat{u}_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)w_T(t)e^{-i2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(f')\hat{w}_T(f-f')df' \quad (5.1)$$

$$\text{ここで, } \hat{w}_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w_T(t)e^{-i2\pi ft}dt = T \left(\frac{\sin \pi fT}{\pi fT} \right) \quad (5.2)$$

を計算していることになる. これは, 図 5.2(b) の $f = 0$ で計算されるスペクトルの一部が $|f| > 1/T$, すなわち \hat{u}_k が \hat{u}_{k-1} や \hat{u}_{k+1} に”漏れる”ことを意味する. これを防ぐために, $w_T(t)$ の代わりに様々な窓関数が使われる. 窓関数の種類やそれぞれの周波数特性などについては, Kaimal and Finnigan (1994)7.3 節, Press et al. (1992) 等に詳しい.

注意が必要なのは, 窓関数を掛けると元のデータの平均がゼロでは無くなるので, もう一度平均の計算が必要になることと, 窓関数によってデータの変動が減ることになるのでその分をあとで補てんする必要がある. 具体的には, 窓関数 $w(t)$ を掛けた場合は, 計算されたスペクトルを

$$C_w = \int_0^T w(t)^2 dt \quad (5.3)$$

で割ってやる必要がある.

5.2.3 データ数の決定

FFT のアルゴリズムそのものは任意の数のデータに対して適用可能であるが, 多くの FFT プログラムは 2^n ($n = 1, 2, \dots$) の個数のデータのみを扱う. 観測データがこの数と一致しない場合は, データの一部を選択してデータ数を減らすか, あるいはゼロデータを付加してデータの数を増やす必要がある. ゼロ・データを付加するとデータ長 T が長くなり, 得られるスペクトルの周波数間隔は $\Delta f = 1/T$ は細くなるが, フーリエ変換の積分値そのものは変わらないので, 同じフーリエ変換が行われる.

5.2.4 FFT による生のスペクトル計算

FFT などのフーリエ変換プログラムは式 (4.4) を用いて, u_j から \hat{u}_k を計算するが, 通常は $\Delta t = 1$ として以下の計算を行う.

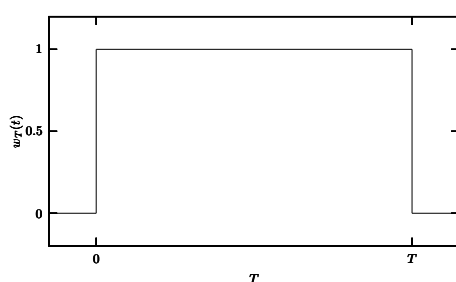
$$\sum_{j=0}^{N-1} u_j \left[\cos \left(2\pi \frac{jk}{N} \right) - i \sin \left(2\pi \frac{jk}{N} \right) \right] = A_k - iB_k \quad (k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2})$$

よって, A_k, B_k から

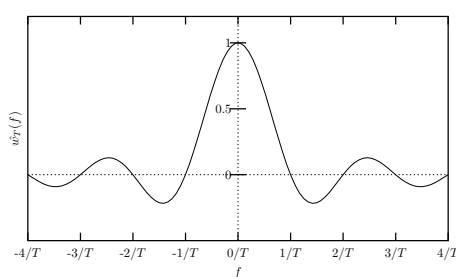
$$\hat{u}_k = \frac{T}{N} A_k + i \frac{T}{N} B_k \quad (5.4)$$

によって得られる. スペクトルはここから,

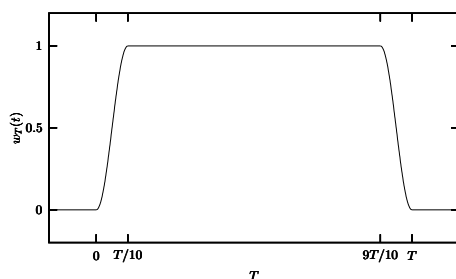
$$S_{u,k} = \frac{1}{T} E [|\hat{u}_k|^2] = \frac{T}{N^2} E [(A_k^2 + B_k^2)] = \frac{\Delta t}{N} E [(A_k^2 + B_k^2)] \quad (5.5)$$



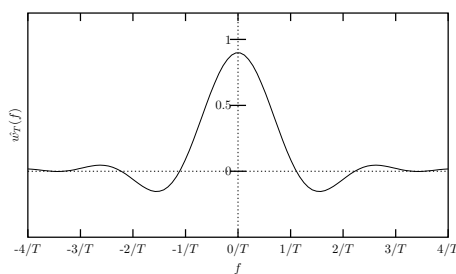
(a) 矩形窓関数 $w_T(t)$



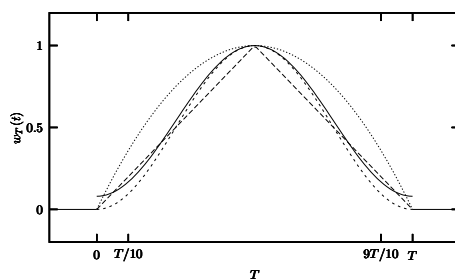
(b) 矩形窓関数の周波数特性 $w_T(f)$



(c) Cosine Tapering

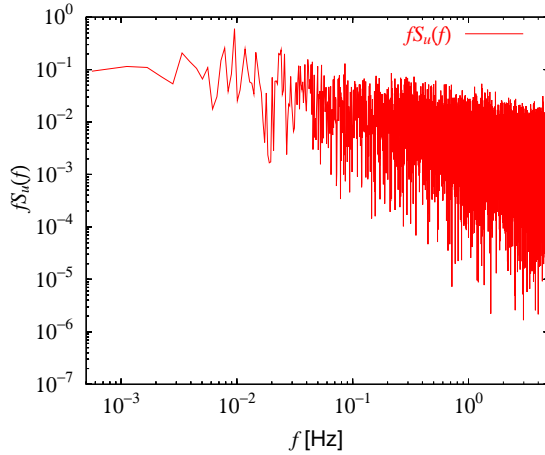


(d) Cosine Tapering の周波数特性

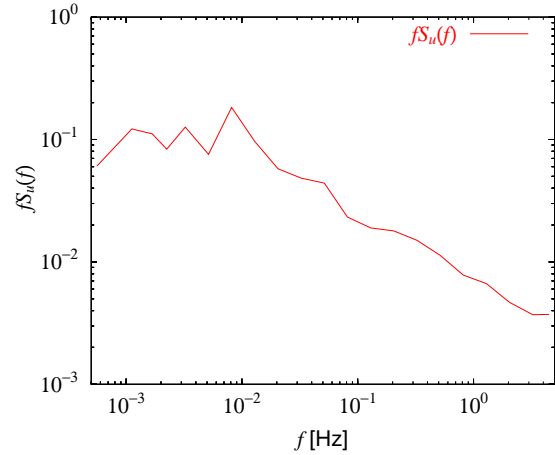


(e) 様々な窓関数

図 5.2: 窓関数とその周波数特性



(a) 生のスペクトル計算値



(b) ブロック平均

図 5.3: FFT によって計算された生のスペクトルとブロック平均を取ったスペクトル

として求められる。

5.2.5 生スペクトルの平滑化・アンサンブル平均

このようにして得られた生のスペクトル値は、特に高周波において大きな変動を示す。これを実用的なものにするには、上式の $E[]$ に相当する演算が必要である。これには、いくつかの方法がある。

平滑化 スペクトルに対して、移動平均や三角ウィンドウなどを掛けて平滑化する。

ブロック平均 スペクトルデータを l 個に分割し、それぞれでブロック平均を取る。

アンサンブル平均 スペクトルを取る前の時系列を m 個に分割しておき、それぞれのスペクトルを計算した後、 m 個のスペクトルを平均する。

5.2.6 スペクトルのグラフ表現

以上のようにして求められたスペクトル $S_u(f)$ は、しばしば対数軸を用いて表示されることが多い。この時、

$$\overline{u^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} f S_u(f) d(\log f) \quad (5.6)$$

であるので、 x 軸を $\log f$ として y 軸を $f S_u(f)$ とすると、 x 軸 ($\log f$) と $f S_u(f)$ の間の面積が分散に相当する。大気科学における応用では、 x 軸を $\log f$ 、 y 軸を $\log[f S_u(f)]$ とすることが多いのは、 f と $S_u(f)$ 、そして $f S_u(f)$ 間におけるべき乗関係が直線に表示されることを利用したものである。

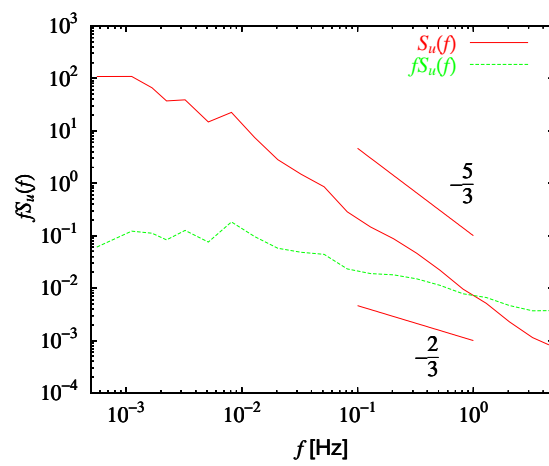


図 5.4: 両対数グラフにおけるスペクトルの表現

第II部

大気境界層乱流のスペクトル解析

第6章 乱流のスペクトル解析

乱流は三次元現象であるため、三次元空間での自己・相互相関、そしてスペクトルを考える。位置ベクトルを $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ 、また風速および温度などのスカラー量を $u_i(\mathbf{x})$ とする。 $i = 1, 2, 3$ の時は、 u_i は風速の3成分 (u, v, w) 、また $i = 4$ の時は温度 $u_4 = T$ 、また $u_5 = q$ は比湿を表すとする。

また、大気境界層科学の慣例により、摩擦速度 u_* の方向 (近似的に主風向 $\bar{\mathbf{u}}$) を x 軸に取る。

6.1 3次元空間でのスペクトル

6.1.1 3次元スペクトル

乱流場の解析は一般には、諸量 u_i の空間構造によって議論されることが多い。まず、3次元での自己・相互相関、3次元空間相関テンソルを以下のように定義する。

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \equiv \overline{u'_i(\mathbf{x} + \mathbf{r})u'_j(\mathbf{x})} \quad (6.1)$$

乱流場が時空間双方で統計的に一様 (statistically homogeneous) ならば、 $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ は \mathbf{r} のみの関数、すなわち $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = R_{ij}(\mathbf{r})$ となる。 $R_{ij}(\mathbf{r})$ のフーリエ変換を E_{ij} とすると両者の関係は、

$$E_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (6.2)$$

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} E_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} d\boldsymbol{\kappa} \quad (6.3)$$

となる。ここで、 $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ は波数ベクトルである。式 (6.1), (6.3) において $\mathbf{r} = 0$ として、対角成分の和 $R_{ii}(0)$ は、

$$R_{ii}(0) = \overline{u'_i u'_i} = \overline{u'^2 + v'^2 + w'^2} = \iiint_{-\infty}^{\infty} E_{ii}(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa} \quad (6.4)$$

となり、乱流エネルギーの2倍となる。 $E_{ii}(\boldsymbol{\kappa})$ は、乱流エネルギーのうち波数ベクトルが、 $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ となる速度変動の持つエネルギー、すなわち波数空間での乱流エネルギーの分布を表している。波数空間で、半径 $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}|$ の球面上 σ において $E_{ii}(\boldsymbol{\kappa})$ を積分することで、 $E_{ii}(\boldsymbol{\kappa})$ の持つ方向性の情報が無くなり、波数 κ のみの関数である3次元エネルギースペクトル $E(\kappa)$ を得ることができる。

$$E(\kappa) = \frac{1}{2} \oint \oint E_{ii}(\boldsymbol{\kappa}) d\sigma \quad (6.5)$$

$E(\kappa)$ を $\kappa = 0$ から ∞ まで積分すれば、

$$\int_0^{\infty} E(\kappa) d\kappa = \overline{e_t} \equiv \frac{1}{2} \overline{u'^2 + v'^2 + w'^2} \quad (6.6)$$

となり、全乱流エネルギーとなる。

6.1.2 一次元スペクトル

乱流科学やその応用の中で実験的によく計測されるものに、 $R_{11}(r_1, 0, 0)$, $R_{22}(r_1, 0, 0)$ があり、それぞれ縦相関、横相関と呼ばれる。それぞれ乱流場で $u = u_1$, $v = u_2$ を主流速方向に r_1 離れた 2 地点で計測して求められるか、あるいは 1 地点の時系列で後に述べる凍結乱流仮説を用いて求められる。そのフーリエ変換 $F_u(\kappa_1)$, $F_v(\kappa_1)$ と逆フーリエ変換は、

$$F_u(\kappa_1) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(r_1, 0, 0) e^{-i\kappa_1 r_1} dr_1 \quad R_{11}(r_1, 0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_u(\kappa_1) e^{i\kappa_1 r_1} d\kappa_1 \quad (6.7)$$

$$F_v(\kappa_1) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{22}(r_1, 0, 0) e^{-i\kappa_1 r_1} dr_1 \quad R_{22}(r_1, 0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_v(\kappa_1) e^{-i\kappa_1 r_1} d\kappa_1 \quad (6.8)$$

のように定義され、縦相関スペクトル、横相関スペクトルと呼ばれる。また、縦相関スペクトルと、先に述べた $E_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$ との関係は、式 (6.3) に $i = j = 1$ と $\mathbf{r} = (r_1, 0, 0)$ を代入して、

$$R_{11}(r_1, 0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa_1 r_1} d\kappa_1 \iint_{-\infty}^{\infty} E_{11}(\boldsymbol{\kappa}) d\kappa_2 d\kappa_3 \quad (6.9)$$

これを式 (6.7) と比較すると、

$$F_u(\kappa_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} E_{11}(\boldsymbol{\kappa}) d\kappa_2 d\kappa_3 \quad (6.10)$$

を得る。同様に、 $F_v(\kappa_1)$ についても、

$$F_v(\kappa_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} E_{22}(\boldsymbol{\kappa}) d\kappa_2 d\kappa_3 \quad (6.11)$$

を得る。

1 次元スペクトル $F_u(\kappa_1)$, $F_v(\kappa_1)$ と 3 次元スペクトル $E(k)$ の関係は一般には複雑であるが、一様等方性乱流においては、以下のような簡潔な式で表される (Tennekes and Lumley, 1972)。

$$E(\kappa) = \kappa^3 \frac{d}{d\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{dF_u(\kappa)}{d\kappa} \right) \quad (6.12)$$

$$\frac{d}{d\kappa} F_v(\kappa) = -\frac{\kappa}{2} \frac{d^2}{d\kappa^2} F_u(\kappa) \quad (6.13)$$

これらの式から、 $E(\kappa) \propto \kappa^n$ ならば、 $F_u(\kappa) \propto \kappa^n$ および $F_v(\kappa) \propto \kappa^n$ であることが示される。

6.2 時間、距離そして凍結乱流仮説

前述のような 1 次元の相関関数は、乱流場の中でセンサーを瞬時に動かすか、定点での時系列観測で得られる時系列から、得ることができる。例えば後者の場合では、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ における時系列測定 $u_i(\mathbf{x}_0, t)$ は、 $u_i(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{u}}t, 0)$ として空間分布として解釈することができる。これは、乱流場があたかも凍結しているかの様に扱うことから、凍結乱流仮説 (frozen turbulence hypothesis) あるいは Taylor 仮説と呼ばれる。

凍結乱流仮説をスペクトルの世界に当てはめることは、 $\kappa_1 = 2\pi f / \bar{u}$ とする事に他ならない。 $u_1 = u$ の周波数スペクトルを $S_u(f)$ とすれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_u(\kappa_1) d\kappa_1 = \sigma_u = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(f) df \quad (6.14)$$

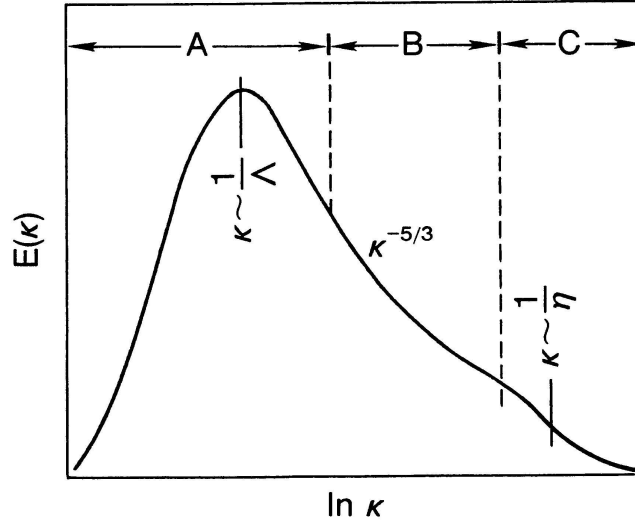


Fig. 2.1. Schematic of energy spectrum in the atmospheric boundary layer showing distinct regions of energy production (A) and dissipation (C) and the inertial subrange (B), where both energy production and dissipation are negligible. Λ is the integral scale of turbulence and η is the Kolmogorov microscale.

図 6.1: エネルギーカスケードの概念 (Kaimal and Finnigan, 1994, より)

が成立する。ここから、

$$F_u(\kappa_1)d\kappa_1 = S_u(f)df$$

すなわち、

$$\kappa_1 F_u(\kappa_1) = f S_u(f) \quad (6.15)$$

が、凍結乱流仮説と等価ということになる。

6.3 エネルギーカスケードと3つの周波数領域

乱流では、大きなスケールの渦が平均流からエネルギーを受け取り、速度変動のひずみによる渦の伸張によって小さなスケールへエネルギーが伝達され、最後に分子粘性によって、熱に変換される (Tennekes and Lumley, 1972). このように乱流エネルギーが分子粘性によって熱に変換されることを粘性消散（粘性散逸, viscous dissipation）とよび、粘性消散によって熱に変換されるエネルギー量を消散率（散逸率, dissipation ratio）と定義し、 ϵ で表す。

$$\epsilon \equiv \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \quad (6.16)$$

このような大きな渦から小さな渦への乱流エネルギーの流れをエネルギーカスケードと呼ぶ。

乱流の最も大きな渦は最大の乱流エネルギーを持つので、大きな渦の波数領域をエネルギー保有領域と呼ぶ。また、消散が起こるような波数領域は、分子粘性が卓越する必要からごく小さな渦の領域であり、エネルギー保有領域とはいくつものオーダーで波数が異なるのが一般である。よって、その間に広大なエネルギーカスケードが支配的になる領域があり、慣性小領域と呼ばれる。このように、乱流スペクトルの波数領域は大まかに3つに分けることができる。

6.3.1 エネルギー保有領域

エネルギー保有領域は、乱流の最も大きな渦に相当する波数領域であり、一般に乱流スペクトル $E(\kappa)$ のピーク波数周辺の涼気である。乱流の最大の渦の大きさは、積分スケール Λ (式 (1.23)) のオーダーである。よって、エネルギー保有領域は $\kappa \sim 1/\Lambda$ 付近の周波数領域である。

6.3.2 消散領域

消散領域では、消散率 ϵ の割合で乱流エネルギーが熱に変換される。この波数領域において主要なパラメーターは ϵ と動粘性係数 ν である。この二つから、長さ、時間、速度スケールを定義できる。

$$\eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} \quad \tau \equiv \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2} \quad v \equiv (\nu\epsilon)^{1/4} \quad (6.17)$$

これらのスケールはコルモゴロフのマイクロスケール（ロシアでは内部スケール）と呼ばれ、消散領域の渦の長さ、時間、速度のスケールを表している。このマイクロスケールを用いると、消散領域では $\kappa \sim 1/\eta$ であることになる。

6.3.3 慣性小領域

一般に Λ と η はオーダーで異なり、エネルギー保有領域 $\kappa \sim 1/\Lambda$ と消散領域 $\kappa \sim 1/\eta$ の間には、幾オーダーにもまたがる波数領域が存在する。このような波数領域を慣性小領域と呼ぶが、この領域ではエネルギーカスケードが主要な現象であり、乱流エネルギーが生起したり失われたりする事はない。この領域をカスケードしていくエネルギーは、消散領域において失われるエネルギー ϵ に等しく、エネルギースペクトル E は ϵ と κ のみ依存する。次元解析によって、

$$E(\kappa) = \alpha \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \quad (6.18)$$

を得る。式 (6.18) は Kolmogorov の $-5/3$ 乗則と呼ぶ。式 (6.18) を一次元スペクトルについて書き直すと、

$$F_u(\kappa_1) = \tilde{\alpha} \epsilon^{2/3} \kappa_1^{-5/3} \quad (6.19)$$

$$F_v(\kappa_1) = F_w(\kappa_1) = \frac{4}{3} F_u(\kappa_1) = \frac{4}{3} \tilde{\alpha} \epsilon^{2/3} \kappa_1^{-5/3} \quad (6.20)$$

となる。ここで、 α あるいは $\tilde{\alpha} = \frac{18}{55} \alpha$ は Kolmogorov 定数と呼ばれる普遍的な定数であり、 $\tilde{\alpha} = 0.51 \pm 0.01$ (大気境界層乱流, Högström, 1996), $\tilde{\alpha} = 0.52 \pm 0.04$ (高レイノルズ乱流, Sreenivasan, 1995, 1996) という報告がある。

また、慣性小領域における温度 θ 、比湿 q のようなスカラー量 s のスペクトル $E_s(\kappa)$ についても、上記と同様な議論によって

$$E_s(\kappa) = \beta \epsilon_s \epsilon^{-\frac{1}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}} \quad (6.21)$$

を得る。また 1 次元スペクトルについても、

$$F_s(\kappa_1) = \tilde{\beta} \epsilon_s \epsilon^{-\frac{1}{3}} \kappa_1^{-\frac{5}{3}} \quad (6.22)$$

となる。ここで、 ϵ_s はスカラー s の消散率、 β または $\tilde{\beta} = \frac{5}{3} \beta$ は Obukhov-Corrsin 定数と呼ばれる普遍定数であり、 $\tilde{\beta} = 0.8 \pm 0.1$ (大気境界層乱流, Högström, 1996), $\tilde{\beta} \simeq 0.8$ (高レイノルズ乱流, Sreenivasan, 1995, 1996) という報告がある。

第7章 大気境界層乱流のスペクトル

7.1 接地層

モニン＝オブコフ相似則を用いて，接地層における風速，温度，湿度のスペクトル $S_u(f)$, $S_v(f)$, $S_w(f)$, $S_\theta(f)$ の規格化を考える．スケールパラメータは， u_* , $\theta_* \equiv \overline{w\theta}'_0/u_*$, z , L である． $S_u(f)$ の慣性小領域部分は，次の様に無次元化できる． $\kappa_1 = 2\pi f/\bar{u}$ であるから，式 (6.15) より，

$$f S_u(f) = \kappa_1 F_u(\kappa_1) = \tilde{\alpha} \epsilon^{2/3} \left(\frac{2\pi f}{\bar{u}} \right)^{-2/3} \quad (7.1)$$

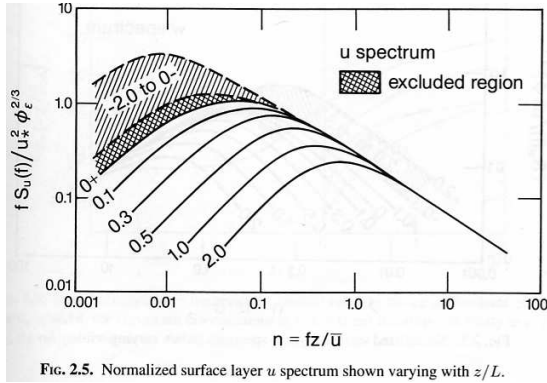


FIG. 2.5. Normalized surface layer u spectrum shown varying with z/L .

(a) $S_u(f)$

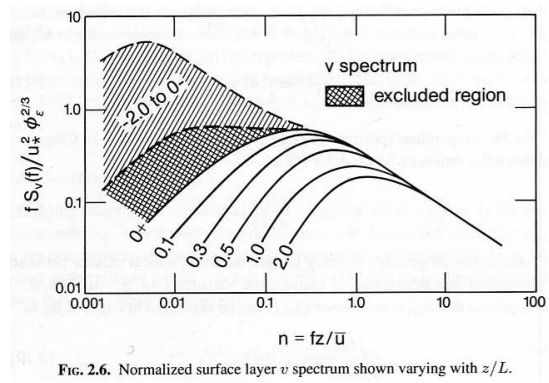


FIG. 2.6. Normalized surface layer v spectrum shown varying with z/L .

(b) $S_v(f)$

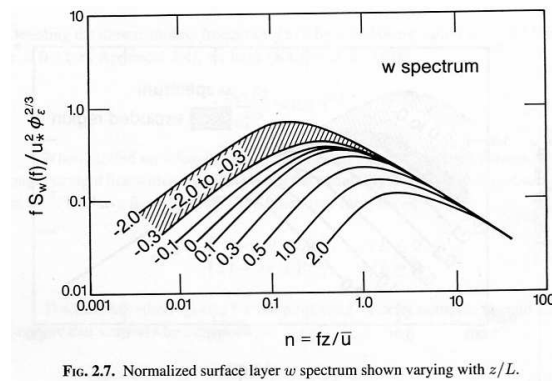


FIG. 2.7. Normalized surface layer w spectrum shown varying with z/L .

(c) $S_w(f)$

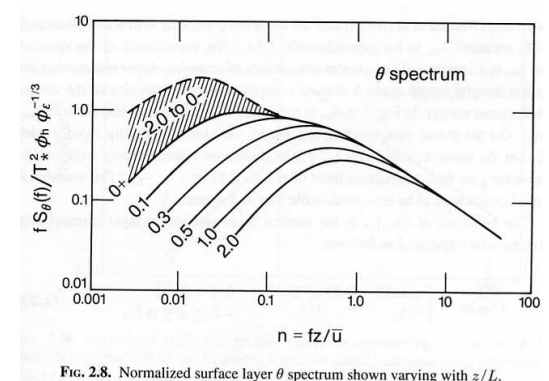


FIG. 2.8. Normalized surface layer θ spectrum shown varying with z/L .

(d) $S_\theta(f)$

図 7.1: 接地層における風速・温度変動のスペクトルの無次元表示 (Kaimal and Finnigan, 1994, より).

となる。 ϵ はモニン＝オブコフ相似則において以下のように無次元化される。

$$\phi_\epsilon = \frac{kz\epsilon}{u_*^3} \quad (7.2)$$

これを用いて、

$$\begin{aligned} \frac{fS_u(f)}{u_*^2} &= \frac{\tilde{\alpha}}{(2\pi)^{2/3}} \frac{(kz)^{2/3}\epsilon^{2/3}}{u_*^2} \frac{1}{(kz)^{2/3}} \left(\frac{f}{\bar{u}}\right)^{-2/3} \\ &= \frac{\tilde{\alpha}}{(2\pi k)^{2/3}} \phi_\epsilon^{2/3} \left(\frac{fz}{\bar{u}}\right)^{-2/3} \end{aligned} \quad (7.3)$$

と表される。 fz/\bar{u} は無次元化された周波数、無次元周波数に相当するので、 n と表し、 $\tilde{\alpha} = 0.55, k = 0.4$ とすれば、

$$\frac{fS_u(f)}{u_*^2 \phi_\epsilon^{2/3}} = 0.3n^{-2/3} \quad (7.4)$$

となる。 $S_v(f) = S_w(f) = 4/3 S_u(f)$ (式 (6.20)) より、

$$\frac{fS_v(f)}{u_*^2 \phi_\epsilon^{2/3}} = 0.4n^{-2/3} \frac{fS_w(f)}{u_*^2 \phi_\epsilon^{2/3}} = 0.4n^{-2/3} \quad (7.5)$$

となる。また、温度についても同様に、無次元温度消散率 ϕ_{ϵ_θ}

$$\phi_{\epsilon_\theta} \equiv \frac{kz\epsilon_\theta}{u_* \theta_*^2} \quad (7.6)$$

を用いて、

$$\frac{fS_\theta(f)}{\theta_*^2 \phi_{\epsilon_\theta} \phi_\epsilon^{-1/3}} = 0.43n^{-2/3} \quad (7.7)$$

と表すことができる。図 7.1(a)～(d) は、無次元化したスペクトルの安定度 z/L に対する振る舞いである。

関連図書

- Bendat, J.S. and Piersol, A.G. (1971): Random Data Analysis and Measurement Procedure. Wiley Inter-Science. 594 pp.
- Högström, U. (1996): Review of some basic characteristics of the atmospheric surface layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, **78**, pp. 215–246
- Kaimal, J. and Finnigan, J. (1994): Atmospheric Boundary Layer Flows: Their Structure and Measurement. Oxford University Press, New York
- Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., and Flannery, B. (1992): Numerical Recipes in C. Cambridge Univ. Press, 2nd edition
- Sreenivasan, K. (1995): On the universality of the Kolmogorov constant. *Phys. Fluids*, **7**, pp. 2778–2784
- Sreenivasan, K. (1996): The passive scalar spectrum and the Obukhov-Corrsin constant. *Phys. Fluids*, **8**, pp. 189–196
- Tennekes, H. and Lumley, J.L. (1972): A First Course in Turbulence. The MIT Press, Cambridge, MA. 300 pp.
- 日野幹雄 (1977): スペクトル解析. 朝倉書店