波数の定義について

浅沼　順

September 14, 2004

1 辞書・百科事典から

波数 (wavenumber) の定義を、いくつかのオンライン辞書を調べてみると、まず、フリー百科事典 Wikipedia の日本語版 (http://ja.wikipedia.org/) では、

> **波数 (はすう, Wave number, Wavenumber)** とは、2π を波長 λ で割った数のこと。両端固定の長さ L のひもの振動を考えると、波数 k_n は波の周期の数 n に比例する。$k_n = \frac{2\pi}{L}n$ q2π がなければ、単位長さあたりの波の周期の数となる。(http://ja.wikipedia.org/ より原文のまま抜粋)

とある。あまりはっきりしないので、同じ Wikipedia の英語版 (http://en.wikipedia.org/) を調べてみると、少し詳しい解説があった。

> **Wavenumber** in most physical sciences is a wave property usually represented κ. It is inversely related to wavelength (usually represented λ). Wavenumber is most frequently defined as: $\kappa = 2\pi/\lambda$. Less frequently it is defined simply: $\kappa = 1/\lambda$. The wavenumber is closely related to the concept of the wave vector.
>
> **Wavenumber** in atmospheric science is defined as wavelength divided by the length of the spatial domain, or equivalently the number of times a wave has the same phase over the spatial domain. The domain might be 2π for the non-dimensional case, or $2\pi R\cos(\phi)$ for an atmospheric wave, where R is Earth's radius and ϕ is latitude. Wavenumber is the spatial analogue of frequency.
>
> Wavenumber and frequency can be obtained from grid point data by application of a Fourier transform in space or time, respectively. In the atmospheric sciences , wavenumber-frequency diagrams are a common way of visualizing atmospheric waves. (http://en.wikipedia.org/ より原文のまま抜粋.)

となっている。

また、米国気象学会のオンライン気象用語辞典 (Glossary of Meteorology, http://amsglossary.allenpress.com/) では、

> **wavenumber**: Often 2π divided by wavelength but also may be simply reciprocal wavelength (used especially in infrared spectroscopy). According to the first definition, wavenumber is the number of waves in a distance 2π (units are those of wavelength). (`http://amsglossary.allenpress.com/`より原文のまま抜粋.)

とあります。このように大気科学の大循環などで用いる定義をのぞけば、波数(wavenumber, κ) には波長を λ とすると、以下の 2 つの定義が存在することになる。

定義 1

$$\kappa \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

定義 2

$$\kappa \equiv \frac{1}{\lambda}$$

学術分野によって、どちらを主として用いるかが、主に慣習で決まってくるものと考えられる。

2　物理学・乱流力学における波数

ここで我々の分野と関係の深い物理学、主に乱流力学での波数の定義と使用例を調べてみる。Tennekes and Lumley (1972), Monin and Yaglom (1971), 木田・柳瀬 (1999), Pope (2000) のいずれをみても、波数は上記の定義 1,$\kappa \equiv 2\pi/\lambda$ として用いられているようである。おそらく、これは上記の文献にもあるように、物理学の伝統であろう。

さて、上記のように波数を定義するとなると、一点不可解な問題がある。ある長さ ℓ に対する波数は、上記の定義に従えば、

$$\kappa = \frac{2\pi}{\ell} \tag{1}$$

であるが、大抵の場合、

$$\kappa = \frac{1}{\ell} \tag{2}$$

と書かれ、2π が省略されている。例えば、コルモゴロフの長さスケール

$$\eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{3}$$

は、乱流エネルギーが熱に変換される消散領域の長さスケールを表す。ここで、ν は粘性係数、ϵ は乱流エネルギーの消散率である。この領域に対応する波数は、

$$\kappa = \frac{1}{\eta} \qquad \text{または} \qquad \kappa\eta = 1 \tag{4}$$

と表され、これも 2π がどこかへ消えてなくなっており、数学的に矛盾しているような印象を持つ。このような記法は、上記の教科書のうち、Tennekes and Lumley (1972), Monin and Yaglom (1971), 木田・柳瀬 (1999) にみられる。

また、スペクトルの表示も、x 軸を $\kappa\eta$ を用いて無次元で表示することが多いが、これも $\kappa\eta = 1$ が消散領域となり、y 軸を消散率 ϵ で無次元化すれば、慣性小領域のスペクトルが一致して表示されることになる。

このような表記法は、η そのものがオーダーのみで意味を持つ値であり、式 4 が、単にオーダーの比較でしか意味を持たないことに由来するものである。よって、数学的には矛盾しているように見えても、物理的には一貫しているのである。なお正確な数学的な定義に追従する教科書では、Pope (2000) のように式 1 の表記を徹頭徹尾使用しているし、木田・柳瀬 (1999) では式 2 を式 1 の代わりに使用する旨、脚注に断り書きがされている。

3 大気境界層科学における波数

一般の乱流力学が問題にするような乱流の形態、格子乱流や混合層、ジェットなどでは、乱流場に影響を及ぼす主要な長さスケールが、消散領域のスケール以外にあまり登場せず、このように長さスケールに対して、多少ルーズな感覚を適用しても構わない訳である。しかしながら、大気境界層の、特に接地層においては地表面からの高さ z が、乱流の特性に大きく影響を与える因子となっており、一般の乱流力学のようなおおらかな長さスケールの感覚は、いささか不便になる。例えば、z に対する波数を $\kappa = 2\pi/z$ と考えるか $\kappa = 1/z$ で、約 6 倍異なり、地上 3m での観測値が地上約 20m での観測地と混同されることになる。

おそらくこのような事情から大気境界層科学では、スペクトルの表示に、無次元化周波数 (normalized frequency),

$$n \equiv \frac{fz}{\overline{u}} \tag{5}$$

を用いることが多い。ここで f は周波数、$\overline{u}$ は平均風速である。これはテイラーの凍結乱流仮説を用いて周波数 f に対する波長を

$$\lambda = \frac{\overline{u}}{f} \tag{6}$$

とし、

$$n = \frac{z}{\lambda} = \frac{fz}{\overline{u}} \tag{7}$$

としているものである。これは、前述の波数の定義 2 を使用していることに他ならないが、式 5 を用いている文献・教科書では、必ずと言ってよいほど「波数」, “wavenumber” という用語を用いない。これは、２種類の定義を混同しないためと考えられる。

このような無次元周波数 n の使用は、Kaimal and Finnigan (1994), Stull (1988) などの代表的な大気境界層科学の教科書にみられる。なお、Boundary-Layer Meteology や Journal of Atmospheric Sciences などの大気乱流関連の文献を見ると、一般的な乱流力学との整合性を重視する文献では、「波数 (wavenumber)」、

「波数空間 (wavenumber space)」、という用語を使用するのに対し、大気境界層科学の系統の論文では、「周波数 (frequency)」、「周波数空間 (Fourier domain)」という用語が多用される。どちらの用語を用いるかで、著者のバックグラウンドがわかるおもしろい例である。さらにおもしろいのは、両者を区別しながら使用している相互変換的に使用している文献 (McNaughton and Brunet, 2002) である。これは、３次元スペクトルを波数ベクトルの関数として表し、１次元スペクトルを無次元周波数の関数として表している例である。

References

Kaimal, J. and Finnigan, J. (1994): Atmospheric Boundary Layer Flows: Their Structure and Measurement. Oxford University Press, New York

McNaughton, K. and Brunet, Y. (2002): Townsend's hypothesis, coherent structures and Monin-Obukhov similarity. *Boundary-Layer Meteorol.*, **102**(2), pp. 161 – 175

Monin, A. and Yaglom, A. (1971): Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence, Vol. 1. The MIT Press, Cambridge, MA. 769pp

Pope, S.B. (2000): Turbulent Flows. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK

Stull, R.B. (1988): An Introduction to Boundary Layer Meteorology. Kluwer Academic Publishers

Tennekes, H. and Lumley, J.L. (1972): A First Course in Turbulence. The MIT Press, Cambridge, MA. 300pp, ( )

木田重雄・柳瀬真一郎 (1999): 乱流力学. 浅倉書店