

軸対称圧縮性ナビエ・ストークス 方程式の数値解析 — ランク・ヒルシュ管の温度分離機構 —

Numerical Analysis of the Axisymmetric Compressible Navier-Stokes Equations — Temperature Separation of the Ranque-Hirsch Tube —

澤井 智毅*・吉澤 能政**

Tomoki SAWAI, Yoshimasa YOSHIZAWA

1. はじめに

計算機を用いて、流れを数値的に解析する数値流体力学は、1970年代に確立され、80年代に入り計算機の発達及び計算スキームの開発により大きく発展してきている。数値流体力学の目的は流体の運動方程式である非線形偏微分方程式の圧縮性ナビエ・ストークス方程式を計算機で解かせることであり、特に、本研究においては軸対称流れに着目し、流れのモデルとして温度分離機構を持つランク・ヒルシュ管を選ぶ。

この管内の流れの研究は最近では網谷ほか(1983)が実験及び数値解析を行い温度分離特性の予測法を提案している。数値計算に注目してみると網谷等は軸方向には触れずに半径及び回転方向の2次元モデルで解析を行い温度分離機構を導き出した。

Stephan *et al.* (1983, 1984) も数値計算をしようと試みた形跡はあるが実際には単なる次元解析にとどまり特に境界条件などに不適切な設定がなされていると思われる。

本論文においては、数値計算結果からランク・ヒ

ルシュ管内の流れの特性を示すにとどまらず、数値流体力学としての式の誘導についても詳しく論じる。

2. ランク・ヒルシュ管

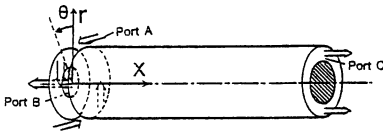
Ranque (1933) は、管に圧縮空気を送り込むことにより一端より低温空気を取り出す実験を行った。現在、ランク・ヒルシュ管(または、ボルテックス管)として知られるこの管は、第1図に示すよう、一端中央部に開口部を付け、他端周辺部に開口部をつけた管に、左端周辺部に配置された入口ノズルより圧縮空気を入れたものである。流れは、管内に旋回流となって流入し、管内において温度分離を生じ、内部回転流によって空気の流れを適当に分流させると右の開口部より高温空気が流出し、左の開口部より低温空気が流れ出す。

ランクの実験以来、この管は、単純な構造にもかかわらず、純粋な流体力学的現象だけで数10度の温度分離を起こすことが、多くの研究者を刺激し、特に発表当初は熱力学第2法則が揺がされたと評判になったと言う。以後、断続的に研究が行われてい

* 筑波大学・院・理工学研究科(現 特許庁) ** 筑波大学構造工学系

るが、温度分離機構については確たる説明はなされて
いない。

(1)



第1図 渦管の概念図

3. 基礎方程式

3.1 円筒座標系における保存型方程式

流体の運動を述べる上で、圧力変化に伴う密度変化が無視できないような流れを、圧縮性流体と呼ぶ。この流体において関係する物理量は密度 ρ 、速度 \vec{v} 、全内部エネルギー e 、圧力 P 、温度 T であり、これらの物理量を結び付ける基礎方程式として、質量保存則を述べた連続方程式、粘性、熱伝導を考慮に入れた運動方程式であるナビエ・ストークス方程式、エネルギー方程式、そして状態方程式がある。

本論文では、円筒座標系 (x, r, θ) で、特に軸対称が考慮できる流れ場について、上記方程式を適用する。

さてナビエ・ストークス方程式とエネルギー方程式は、通常、非保存型であらわされている。しかし数値流体力学においては、保存型方程式を用いる方が有利である。なぜなら衝撃波のような不連続解を満たすべき条件（ランキン・ユゴニオの式）が、保存則から導かれているためである。

これらの方程式の非保存型から保存型への変換は容易であり、つぎのように保存型方程式が書き表せる。

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} + \frac{\tilde{H}}{r} = \frac{\partial \tilde{E}v}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{F}v}{\partial r} + \frac{\tilde{H}v}{r}$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{bmatrix}, \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (e+p)v \end{bmatrix},$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho(v^2 - w^2) \\ 2\rho vw \\ (e+p)v \end{bmatrix}, \quad \text{ここで} \quad p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \right)$$

$$\tilde{E}v = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \text{div } \vec{v} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \frac{\partial w}{\partial x} \\ u \tilde{E}v_2 + v \tilde{E}v_3 + w \tilde{E}v_4 + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F}v = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \text{div } \vec{v} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \\ u \tilde{F}v_2 + v \tilde{F}v_3 + w \tilde{F}v_4 + \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{H}v = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \\ 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \\ u \tilde{H}v_2 + v \tilde{H}v_3 + w \tilde{H}v_4 + \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \end{bmatrix}$$

(1)式において、 u, v, w は、それぞれ x, r, θ 方向の速度成分であり、 c は音速、 λ は熱伝導率を示し

ている。又ベクトルの第1行は連続方程式，第2行はx方向，第3行はr方向，第4行は θ 方向のそれぞれナビエ・ストークス方程式，第5行はエネルギー方程式を表している。本式で $\partial/\partial\theta$ の項が無いのは，軸対称を考慮しているからである。このため実際に基礎方程式を解くために必要な物理空間は，(x, r)面のみとなる。

3.2 一般座標系

さて，先に示した物理空間(x, r)面を一般に直交座標系で考えるには無理がある。なぜなら色々な形状の物体に対して，常に正方形で近似するため，境界条件のとり方や，衝撃波の不連続面の扱いなどが困難となるためである。そこで一般座標系(ξ, η)の導入が重要となってくる。この導入により，物体形状に沿った格子を作ることができ，境界条件が容易に設定でき，保存則を正しく近似できる。又境界層や衝撃波のような，物理量の変化が大きい所での格子の集中が可能となってくる。

実際に本研究に於て行った変数変換について述べよう。曲線座標である物理空間(x, r)を，直交座標である計算空間(ξ, η)に変換を行うことを考える。

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, r) \\ \eta &= \eta(x, r)\end{aligned}\quad (2)$$

これより

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial\xi}\quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial\eta}$$

(3)式を，行列表示すれば

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi} \\ \frac{\partial}{\partial\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & r_\xi \\ x_\eta & r_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix}\quad (3)'$$

ここで行列式を J^{-1} として $\partial/\partial x, \partial/\partial r$ について解くと

$$\frac{\partial}{\partial x} = J \left(r_\eta \frac{\partial}{\partial\xi} - r_\xi \frac{\partial}{\partial\eta} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = J \left(x_\xi \frac{\partial}{\partial\eta} - x_\eta \frac{\partial}{\partial\xi} \right)\quad (4)$$

となり，計量因子は

$$\begin{aligned}\xi_x &= Jr_\eta \\ \xi_r &= -Jx_\eta \\ \eta_x &= -Jy_\xi \\ \eta_r &= Jx_\xi \\ J^{-1} &= x_\xi r_\eta - x_\eta r_\xi\end{aligned}\quad (5)$$

となる。

3.3 一般座標系における保存系方程式

さて(1)式を物理空間(x, r)から，計算空間(ξ, η)に変換を行うと次式をえる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial\xi} + \frac{\partial F}{\partial\eta} + \frac{H}{r} = \frac{\partial Ev}{\partial\xi} + \frac{\partial Fv}{\partial\eta} + \frac{Hv}{r}$$

$$Q = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \quad E = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_r p \\ \rho w U \\ (e+p)U \end{pmatrix},$$

$$F = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_r p \\ \rho w V \\ (e+p)V \end{pmatrix}, \quad H = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho(v^2 - w^2) \\ 2\rho vw \\ (e+p)v \end{pmatrix}$$

$$U = \xi_x u + \xi_r v, \quad V = \eta_x u + \eta_r v,$$

$$Ev \text{ or } Fv = J^{-1} \left\{ k_x \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \text{div } \vec{v} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta \end{pmatrix} \right\}$$

$$+k_r \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \\ \Omega \end{pmatrix},$$

$$Hv = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \\ 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \\ \Omega \end{pmatrix}$$

ただし,

$$\begin{cases} k = \xi & \text{for Ev} \\ k = \eta & \text{for Fv} \end{cases}$$

$$\theta = \mu \left\{ u \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right.$$

$$\left. + v \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\Omega = \mu \left\{ u \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right.$$

$$\left. + w \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \right\} + \lambda \frac{\partial T}{\partial r}$$

この様にヤコビアン J を用いることにより、一般座標に変換しても保存型を保つことが出来ることは有用である。しかし計量因子を含めた保存型を差分化するときに計量因子だけを求める差分スキームとのかねあいから生じる誤差があることに注意しなければならない。この点については、後で詳しく述べる。

4. 数値解法

4.1 ビーム・ウォーミング法

(6)式の基礎方程式の解法は、いくつかあるが本研究においては、現在、数値流体力学において主流であるビーム・ウォーミング法 (Beam and Warming, 1978) に、Pulliam and Chaussee (1981) の提案した対角化法を用いたものを使用する。

ビーム・ウォーミング法における時間についての差分近似は、以下の様に示される。

$$\begin{aligned} \Delta^n Q &= \frac{\theta_1}{1+\theta_2} \Delta t \frac{\partial \Delta^n Q}{\partial t} + \frac{1}{1+\theta_2} \Delta t \frac{\partial Q^n}{\partial t} \\ &+ \frac{\theta_2}{1+\theta_2} \Delta^{n-1} Q + O \left[\left(\theta_1 - \theta_2 - \frac{1}{2} \right) \Delta t^2 \right] \end{aligned} \quad (7)$$

ここでデルタ形式 $\Delta^n Q = Q^{n+1} - Q^n$ を表す。ここで θ_1 の値より陽的 ($\theta_1=0$) にも陰的 ($\theta_1=1$) にも解く事ができ、又 θ_2 の値により時間についての差分スキームを変える事が出来る。本研究においては $\theta_1=1$, $\theta_2=1/2$ を選ぶ。これは陰的かつ時間について3点後退差分を用いたことになる。

$$\begin{aligned} \Delta^n Q &= \frac{\theta_1}{1+\theta_2} \Delta t \left\{ - \frac{\partial \Delta^n E}{\partial \xi} - \frac{\partial \Delta^n F}{\partial \eta} - \frac{\Delta^n H}{r} \right. \\ &\left. + \frac{\partial \Delta^n Ev}{\partial \xi} + \frac{\partial \Delta^n Fv}{\partial \eta} + \frac{\Delta^n Hv}{r} \right\} \\ &+ \frac{1}{1+\theta_2} \Delta t \left\{ - \frac{\partial E^n}{\partial \xi} - \frac{\partial F^n}{\partial \eta} - \frac{H^n}{r} \right. \\ &\left. + \frac{\partial Ev^n}{\partial \xi} + \frac{\partial Fv^n}{\partial \eta} + \frac{Hv^n}{r} \right\} + \frac{\theta_2}{1+\theta_2} \Delta^{n-1} Q \end{aligned} \quad (8)$$

上式の右辺第1項の粘性項のデルタ形式は、レイノルズ数が大きい場合は、無視しても良いであろう。しかし以下の説明においては、この項も考えに入れて述べる。

次に(8)式の第1項を左右に移項しさらに線形化のために、ヤコビ行列 (A, B 等) をもちいる。例えば対流項についてテーラー展開をすると

$$E^{n+1} = E^n + \Delta t \frac{\partial E^n}{\partial t} + O(\Delta t^2)$$

$$\therefore \Delta^n E = \left(\frac{\partial E}{\partial Q} \right)^n \Delta^n Q = A^n \Delta^n Q$$

同様に

$$\Delta^n F = \left(\frac{\partial F}{\partial Q} \right)^n \Delta^n Q = B^n \Delta^n Q \quad (9)$$

$$\Delta^n H = \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \right)^n \Delta^n Q = C^n \Delta^n Q$$

となる, A, B, C のヤコビ行列は, 以下のような成分を持つ。

$$A \text{ or } B = \begin{pmatrix} 0 & k_x \\ k_x \phi^2 - u\theta & \theta - (\gamma - 2)k_x u \\ k_r \phi^2 - v\theta & k_{xv} - (\gamma - 1)k_r u \\ -w\theta & k_{xw} \\ \theta(2\phi^2 - Q) & k_x(Q - \phi^2) \\ & -(\gamma - 1)u\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_r & 0 & 0 \\ k_r u - (\gamma - 1)k_{xv} & -(\gamma - 1)k_{xw} & (\gamma - 1)k_x \\ \theta - (\gamma - 2)k_{rv} & -(\gamma - 1)k_{rw} & (\gamma - 1)k_r \\ k_r v & \theta & 0 \\ k_r(Q - \phi^2) & -(\gamma - 1)w\theta & \gamma\theta \\ -(\gamma - 1)v\theta & & \end{pmatrix}$$

(10)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -uv & v \\ w^2 - v^2 & 0 \\ -2vw & 0 \\ v(2\phi^2 - Q) & -(\gamma - 1)uv \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 \\ 2v & -2w & 0 \\ 2w & 2v & 0 \\ Q - \phi^2 - (\gamma - 1)v^2 & -(\gamma - 1)vw & \gamma v \end{pmatrix}$$

ここで k は A, B に対し ξ, η であり, θ は $U = \xi_x u + \xi_r v, V = \eta_x u + \eta_r v$ を示す。又, k_x, k_r は x, r での偏微分, ϕ^2 は $\phi^2 = (\gamma - 1)(u^2 + v^2 + w^2)/2, Q = \gamma e/\rho$ とし γ は比熱比を示している。

次に粘性項のデルタ形式を線形化するには注意が必要である。なぜなら粘性項は, ξ 及び η 微分が混じった形をしている。これは後の近似的因数分解法を用いた時に, ξ, η 方向のみの作用素に因数分

解する際扱いが複雑になり, そのままの形では得策ではない。そこで

$$\begin{aligned} E_v &= E_v^\xi + E_v^\eta, \\ F_v &= F_v^\xi + F_v^\eta, \\ H_v &= H_v^\xi + H_v^\eta, \end{aligned} \quad (11)$$

と ξ 微分を含む項 (添字 ξ) と η 微分を含む項 (添字 η) にわけた。そして $E_v \eta$ 及び $F_v \xi$ のデルタ形式については右辺に戻し (n-1) ステップで陽の評価をすることにした。

対流項と同様に粘性項のデルタ形式は,

$$\begin{aligned} \Delta E_v^\xi(Q, Q_\xi) &= \left(\frac{\partial E_v^\xi}{\partial Q} \right) \Delta^n Q \\ &+ \left(\frac{\partial E_v^\xi}{\partial Q_\xi} \right) \Delta^n Q_\xi + O(\Delta t^2) \\ &= X^n \Delta^n Q + S^n \Delta^n Q_\xi \\ &= (X - S_\xi)^n \Delta^n Q + \frac{\partial}{\partial \xi} (S \Delta Q)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta F_v^\eta(Q, Q_\eta) &= (Y - T_\eta)^n \Delta^n Q \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} (T \Delta Q)^n \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta H_v^\xi(Q, Q_\xi) &= (K - M_\xi)^n \Delta^n Q \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi} (M \Delta Q)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_v^\eta(Q, Q_\eta) &= (L - N_\eta)^n \Delta^n Q \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} (N \Delta Q)^n \end{aligned}$$

ここで(12)式で用いる粘性のヤコビ行列は,

$$X = \frac{\partial E_v^\xi}{\partial Q}, \quad Y = \frac{\partial F_v^\eta}{\partial Q}, \quad S = \frac{\partial E_v^\xi}{\partial Q_\xi}, \quad T = \frac{\partial F_v^\eta}{\partial Q_\eta},$$

$$K = \frac{\partial H_v^\xi}{\partial Q}, \quad L = \frac{\partial H_v^\eta}{\partial Q}, \quad M = \frac{\partial H_v^\xi}{\partial Q_\xi}, \quad N = \frac{\partial H_v^\eta}{\partial Q_\eta}$$

と表せる。結局(8)式は,

$$\begin{aligned} \left\{ I + \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(A - X + S_\xi - \frac{M}{r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} S \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(B - Y + T_\eta - \frac{N}{r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} T \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r} (C - K + M_\varepsilon - L + N_\eta) \Big] \Delta^n Q \\
& = -\frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \Delta t \left\{ \frac{\partial \Delta^{n-1} E v^\eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \Delta^{n-1} F v^\varepsilon}{\partial \eta} \right\} \\
& + \frac{1}{1 + \theta_2} \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (E v - E)^n + \frac{\partial}{\partial \eta} (F v - F)^n \right\} \\
& + \frac{1}{r} (H - H v)^n \Big] + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} \Delta^{n-1} Q
\end{aligned} \tag{13}$$

4.2 近似的因数分解法

さて(13)式の左辺の行列の反転は容易ではない。そこで計算の効率化を計るため、左辺を ξ 微分を含むブロック、 η 微分を含むブロック、又 $1/r$ の項を含むブロックに近似的に因数分解をする。

$$\begin{aligned}
& \left\{ I + \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(A - X + S_\varepsilon - \frac{M}{r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} S \right] \right\} \\
& \left\{ I + \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(B - Y + T_\eta - \frac{N}{r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} T \right] \right\} \\
& \left\{ I + \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \frac{\Delta t}{r} (C - K + M_\varepsilon - L + N_\eta) \right\} \Delta^n Q \\
& = \text{r.h.s of Eq. (13)}
\end{aligned} \tag{14}$$

このように置き換えることにより、それぞれのブロックの反転は、それぞれの作用素のみの連立方程式となり(13)式よりも計算が簡略化される。しかし(14)式の左辺のブロック小行列は、微分演算子を含んだ 5×5 の行列であるため、いまだ反転に手間がかかる。そこで、さらに計算の効率化を計るために、ブロック小行列の対角化を考える。

4.3 対角化

対流項のヤコビ行列 A , B について、ピュリアム等によって与えられている変換行列 T を用いて下記の要領で対角行列 Λ をつくる。

$$A = T_\varepsilon \Lambda_A T_\varepsilon^{-1} \text{ and } B = T_\eta \Lambda_B T_\eta^{-1}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\Lambda_A = D[U, U, U, U + c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_r^2}, \\
U - c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_r^2}]
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_B = D[V, V, V, V + c\sqrt{\eta_x^2 + \eta_r^2}, \\
V - c\sqrt{\eta_x^2 + \eta_r^2}]
\end{aligned}$$

ここで $D[---]$ は、対角行列の対角成分をあらわす。しかし、ヤコビ行列 C 及び粘性項のヤコビ行列は、先の変換行列 T を用いても対角化されない。そこで(10)式の左辺3番目のブロック小行列については、微分演算子を含んでいないので対角化をせず、そのまま 5×5 の行列として扱う。又粘性項のヤコビ行列については、

$$T_\varepsilon^{-1} X T_\varepsilon = \Lambda_x = \dot{\Lambda}_x + \bar{\Lambda}_x \tag{16}$$

の要領で対角成分のみの行列 ($\dot{}$) と、それ以外の成分からなる行列 ($\bar{}$) とに分け、対角成分のみの行列を左辺に残し、残りを右辺に移項し ($n-1$) ステップで陽的に取り扱う。結局、最終式は、

$$\begin{aligned}
& T_\varepsilon \left\{ I + \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\Lambda_A - \dot{\Lambda}_{x-s\varepsilon}) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \dot{\Lambda}_s \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \dot{\Lambda}_M \right] T_\varepsilon^{-1} \right. \\
& T_\eta \left\{ I + \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (\Lambda_B - \dot{\Lambda}_{y-\tau\eta}) - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \dot{\Lambda}_\tau \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \dot{\Lambda}_N \right] T_\eta^{-1} \left\{ I + \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \frac{\Delta t}{r} C \right\} \Delta^n Q \\
& = \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \Delta t \left\{ T_\varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \bar{\Lambda}_{x-s\varepsilon} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \bar{\Lambda}_s \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{\Lambda}_M \right] T_\varepsilon^{-1} + T_\eta \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \bar{\Lambda}_{y-\tau\eta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \bar{\Lambda}_\tau + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{\Lambda}_N \right] T_\eta^{-1} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{r} [K - M_\varepsilon + L - N_\eta] \right\} \Delta^{n-1} Q \\
& + \frac{\theta_1}{1 + \theta_2} \Delta t \left\{ \frac{\partial \Delta^{n-1} E v^\eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \Delta^{n-1} F v^\varepsilon}{\partial \eta} \right\} \\
& + \frac{1}{1 + \theta_2} \Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (E v - E)^n \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} (F v - F)^n + \frac{1}{r} (H - H v)^n \right\} \\
& + \frac{\theta_2}{1 + \theta_2} \Delta^{n-1} Q
\end{aligned} \tag{17}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \dot{A}_{x-s\xi} \text{ or } \dot{A}_{y-\tau\eta} = & \\ & \frac{\mu}{\rho r} D \left[-k_r \tilde{k}_x \left\{ \tilde{k}_r + \tilde{k}_x (\gamma - 1) \frac{\rho w}{c^2} \right\}, \right. \\ & -k_r \tilde{k}_x \left\{ \tilde{k}_x - \tilde{k}_r (\gamma - 1) \frac{\rho w}{c^2} \right\}, 0, \\ & \left. -\frac{1}{3c} \phi \{ (\gamma - 1)v + \tilde{k}_r c \}, \right. \\ & \left. \frac{1}{3c} \phi \{ (\gamma - 1)v - \tilde{k}_r c \} \right] \\ \dot{A}_M \text{ or } \dot{A}_N = & \frac{\mu}{\rho} D \left[\tilde{k}_x^2 k_r \frac{\lambda}{c_v} \frac{p}{\rho c^2} - (\gamma - 1) \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_r}{c^2} \rho \phi \right. \\ & + 2\tilde{k}_r^2 k_r, \tilde{k}_r^2 k_r \frac{\lambda}{c_v} \frac{p}{\rho c^2} + (\gamma - 1) \frac{\tilde{k}_x \tilde{k}_r}{c^2} \rho \phi \\ & + 2\tilde{k}_x^2 k_r, 2\tilde{k}_x^2 k_r, \frac{1}{2c^2} \left\{ -\frac{\lambda}{c_v} k_r \left(\frac{p}{\rho} + c^2 \right) \right. \\ & \left. + (\gamma - 1)c \left(2uk_r \tilde{k}_x - \frac{2}{3} v \phi + 2c^2 \tilde{k}_r^2 k_r \right) \right\}, \\ & \left. -\frac{1}{2c^2} \left\{ \frac{\lambda}{c_v} k_r \left(\frac{p}{\rho} + c^2 \right) + (\gamma - 1)c \left(2uk_r \tilde{k}_x \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{2}{3} v \phi - 2c^2 \tilde{k}_r^2 k_r \right) \right\} \right] \quad (17) \\ \dot{A}_s \text{ or } \dot{A}_t = & \frac{\mu}{\rho} (k_x^2 + k_r^2) D \left[\tilde{k}_x^2 \frac{p}{\rho c^2} + \tilde{k}_r^2, \right. \\ & \left. \tilde{k}_r^2 \frac{p}{\rho c^2} + \tilde{k}_x^2, 1, \frac{1}{2c^2} \left(-\frac{p}{\rho} + \frac{1}{3} c^2 \right), \right. \\ & \left. \frac{1}{2c^2} \left(-\frac{p}{\rho} + \frac{1}{3} c^2 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi &= k_x \tilde{k}_x + k_r \tilde{k}_r, \quad \phi = k_x u + k_r w, \\ \tilde{k}_x &= k_x / \sqrt{k_x^2 + k_r^2}, \quad \text{and} \quad \tilde{k}_r = k_r / \sqrt{k_x^2 + k_r^2} \end{aligned}$$

となる。(17)式において左辺の $\dot{A}_{x-s\xi}$ および $\dot{A}_{y-\tau\eta}$ などは、 $k=\xi$ の時前者を、 $k=\eta$ の時後者を選ぶ。

4.4 計算手順

実際に(17)式を解く手順を示す。

- ① 右辺の計算を n ステップでの物理量を用いて各 (i, j) ポイントについて行う。ここで空間についての微分は差分に置換えて代数的にあつか

う。

- ② 左辺の行列反転のプロセスは、以下の通りである。

- 1° $\Delta Q_1 = T_\xi^{-1}$ [(17)式の右辺]
- 2° $\Delta Q_2 = [I + A_1]^{-1} \Delta Q_1$
- 3° $\Delta Q_3 = T_\eta^{-1} T_\xi \Delta Q_2$
- 4° $\Delta Q_4 = [I + A_2]^{-1} \Delta Q_3$
- 5° $\Delta^n Q = [I + A_3]^{-1} \Delta Q_4$
- 6° $Q^{n+1} = Q^n + \Delta^n Q$

ここで1), 3)は、変換行列 T について反転を行っている。又2), 4)については、微分演算子を含んでいるので3重対角行列となり簡略解法をもちいた。

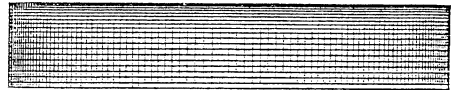
5. 数値計算

5.1 格子生成

本研究においては、第1図の様な簡単な形状をしたランク・ヒルシュ管を考えた。又軸対称を考慮に入れるため、 θ 方向に関しては、格子を無視し、 (x, r) 面のみの2次元の計算格子を作る。

格子生成上、境界層が解像できるような壁面上、及び急激な膨張により物理量の変化が大きいと考えられるノズル入口近くに格子を集中し、計量因子のとりをなくすため格子を密から粗に連続的に変化するように注意をはらった。

格子点は、 101×21 として計算面で $\Delta \xi = \Delta \eta = 0.05$ とした。管の半径で無次元化すると、管の軸長さは5.0、入口幅は0.2、Port Bの出口半径は0.436又Port Cでの出口幅は0.1としている。Port B及びPort Cの長さは、それぞれ出口面積が等しくなるように設定した。



第2図 101×21の格子点構成

5.2 無次元化

(17)式を用いて計算を行う前に、物理量の無次元化

をしておく。基準量として半径 $D=0.1$ 、海拔 0m で温度 300K での密度 ρ_0 及び音速 C_0 を用いて、ナビエ・ストークス方程式の両辺を $\rho_0 C_0^2$ で割ったと考えよう。以下に無次元物理量を示しておく。

$$\rho = \rho^* / \rho_0$$

$$u = u^* / C_0 \quad v = v^* / C_0 \quad w = w^* / C_0$$

$$P = \frac{P^*}{\rho_0 C_0^2} = \frac{P^*}{\rho_0 \frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \frac{P^*}{\gamma P_0}$$

$$e = \frac{e^*}{\rho_0 C_0^2} = \frac{P^*}{\gamma - 1} P + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2)$$

$$T = \frac{T^*}{T_0} = \frac{P^* / \rho^* R}{P_0 / \rho_0 R} = \frac{\gamma P}{\rho} \quad (R: \text{気体定数})$$

μ を一定として基礎方程式から μ 及び熱伝導率 λ についての無次元化をはかる。粘性項は $\partial^2 / \partial x^2 (\mu u)$ の形だから、

$$\mu = \frac{\mu_0 C_0 / D^2}{\rho_0 C_0^2 / D} = \frac{\mu_0}{\rho_0 C_0 D} = \frac{1}{\text{Re}}$$

$$\lambda = \lambda^* \frac{T_0 P}{P^2 \rho_0 C_0^3} = \frac{1}{(\gamma - 1) \text{Pr} \cdot \text{Re}}$$

となる。ここでレイノルズ数を計算すると、 $\text{Re} = \mu_0 C_0 D / \rho_0 = 2.06 \times 10^6$ となった。

5.3 初期条件

計算の効率化及び入口部での物理量のとびを少なくするために管内の初期条件にいくつかの操作を加えた。まず、 θ 方向速度成分については、入口開口部に固体回転（角速度一定）を仮定し、左から右方向には一様に角速度を減らしていく状況を設定し、又半径方向速度成分については、入口開口部より軸に向かい直線的に減らしていくように速度成分を与えた。又圧力及び密度については、両端出口から流出を強制するため初期内圧を加えた。

5.4 境界条件

境界条件については、以下のように入口部、内壁、軸、出口部に分けて設定する。

1) 入口部

入口はノズルのど部にあるため速度を音速とした。しかし、管壁の接線方向に流入した圧縮空気が、どのくらいの割合で回転速度方向成分、及び半

径方向速度成分を持つか予測がつきにくい。そこで半径方向速度成分 v_r をパラメータとして計算を繰り返しその結果から適切な値を設定した。又軸方向速度成分は 0 とした。圧力、密度については貯気槽内の圧力からノズル条件を用いて設定した。

2) 内壁

管内、内壁については粘着条件を使用する。具体的に示すと

$$\text{速度成分} \quad u = v = w = 0$$

$$\text{圧力・密度} \quad \partial p / \partial n = \partial \rho / \partial n = 0$$

$$(n \text{ は壁に対し垂直方向})$$

となる。

3) 軸部

軸方向速度、圧力、密度

$$\partial u / \partial n = \partial p / \partial n = \partial \rho / \partial n = 0$$

$$(n \text{ は壁に対し垂直方向})$$

半径及び回転速度成分 $v = w = 0$

4) 出口部

圧力 $p = p_0$ (大気圧)

速度成分、密度

$$\partial u / \partial n = \partial v / \partial n = \partial w / \partial n = \partial \rho / \partial n = 0$$

$$(n \text{ は出口に対し垂直方向})$$

以上のように境界での物理量を設定した。

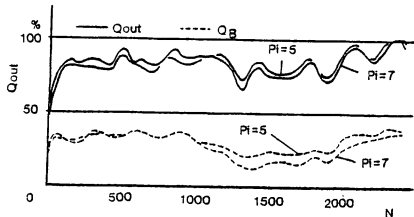
5.5 差分スキーム

(13)式の微分演算子を差分に置き換えて計算するときには、特に対流項の差分スキームに注意しなければならない。差分スキームには、中心差分と風上差分があるが、どちらも差分計算に於て欠点が存在する。ランク・ヒルシュ管内のシミュレーションについては、管内の格子がある程度粗であるため、速度成分のばらつきが生じやすい。そこで、流れの方向とは関係のない中心差分を選び、中心差分の振動を抑えるために人工粘性項を導入した。

6. 数値計算結果

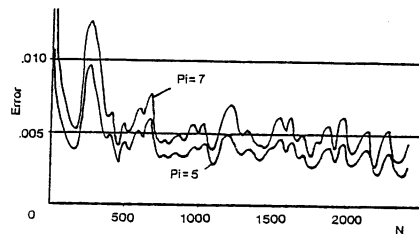
計算は、 $P_i=3, 5$ 及び 7 について試みた。但し $P_i=3$ については、出口において流出すべきところが流入するなど不合理が生じた。これは、流入圧力が不足するためと思われる。以下に示すものは、 $P_i=5$ 及び 7 についてのものである。

さて結果を示す前に先に挙げた入口部での v_i の選択について記す。当然の事だが、パラメータ v_i が変化すれば流入量が変わる。そこで計算を繰り返して、流れが管全体に行き渡った後の両出口部での流出量の和が流入量と等しくなるような v_i を探すことにした。最適と思われる v_i は、 $Pi=5, 7$ に対しそれぞれ $v_i = -0.257, -0.264$ であった。 v_i を使い(流出量)/(流入量)と計算回数 n の関係を第3図に示した。流量が、ほぼつり合った(99.8~100.2%) 計算回数域は、 $Pi=5$ に対しては、 $n=2348\sim 2364$ 、 $Pi=7$ に対しては、 $n=2323\sim 2345$ の間であった。第3図において、実線で示した Q_{out} とは、Port B, Cでの流出量の総和であり、破線で示した Q_B は、Port Bでの流出量である。この図で見て解るように、 $n=1000$ までは初期内圧の影響である程度流出量をかせいでいるが、これを過ぎるとPort Bでの流出量が減り復活するまでに時間がかかる。これは、後に示すベクトル図からも分かるようにPort Bまで流れがたどりつくのに時間がかかるという事に他ならない。



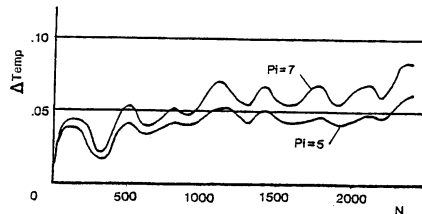
第3図 流出量の変化

L^2 -error と計算回数 n との関係を示す。本計算においては L^2 -error は増減を繰り返しながら減少していることから言って収束性がよいとは言えないが、第4図で示した流量の釣り合った回数域と L^2 -error が最少となる回数域がほぼ同時期であること、又ここでは図に示していないが、管内密度平均がほぼ一定となるなどを考え合わせると先に挙げた $n = 2348 \sim 2364$ ($Pi=5$) 及び $n = 2329 \sim 2345$ ($Pi=7$) で収束したと考えられる。これ以上計算を続けると大きい振動を繰り返しかがら解は発散してしまう。そこで以後で示す等密度線などはこの時間領域での平均をとり示している。



第4図 L^2 誤差の変化

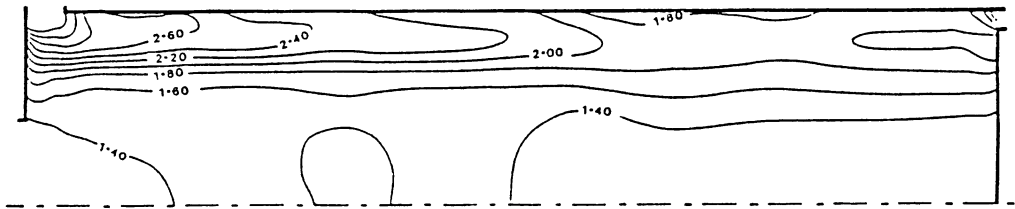
さてPort B及びCでの温度差を第5図に示す。温度を300 Kで無次元化していることを考慮すると $Pi=5$ 及び 7 に対し、温度差はそれぞれ 18.6 K 及び 25.2 K となる。



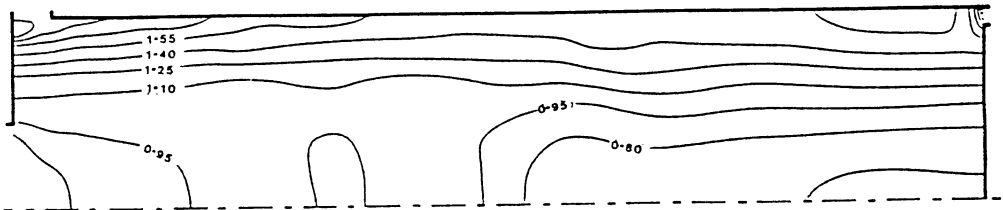
第5図 温度差の変化

最後に $Pi=5$ 及び 7 に対する収束後の等密度線、等圧線、等温度 (v, w) ベクトル、(u, v) ベクトルを第6図及び第7図にそれぞれ示す。(u, v) 及び (v, w) ベクトル図より、入口部より流入した旋回流は、右方向に壁面に沿って流れ、軸長さに対し $3/4$ 程度の所から中心流を生じ、軸中心に沿って左方向へと流れるジェットとに分流していることが分かる。温度分布からは、円筒座標に近い領域では軸中心付近に比べかなり温度が高いことが分かる。これは壁面での境界層における熱の散逸による効果があると考えられる。又この温度分布及び圧力分布を見ると、軸中心付近で圧力が大気圧に近く減少し、断熱膨張していることが分かる。この断熱膨張の為軸中心付近で温度が低くなることは、当然のことである。これらの散逸及び断熱膨張が温度分離の主要因であることが分かった。

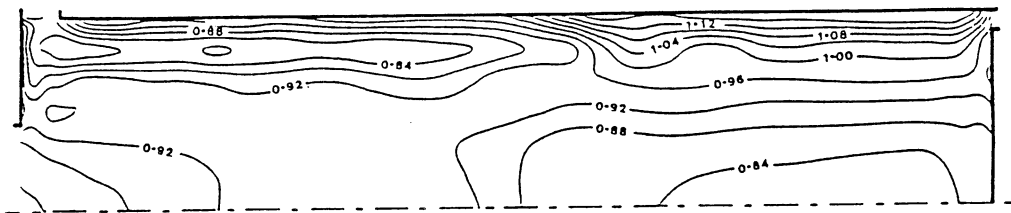
本計算は、FACOM-M 380を用いた。又収束までの CPUtime は、約 25 分であった。



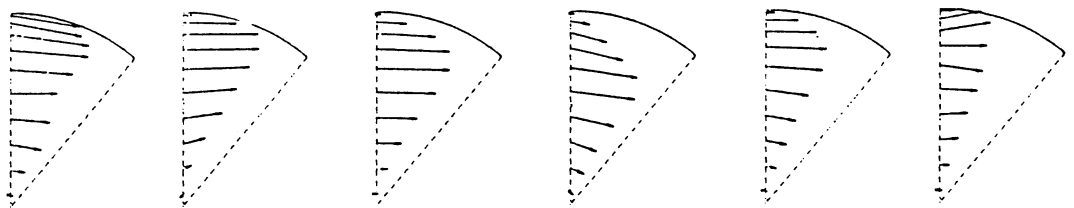
Density contour



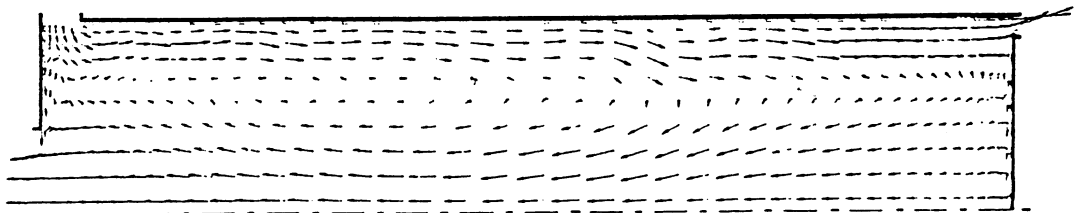
Pressure contour



Temperature contour

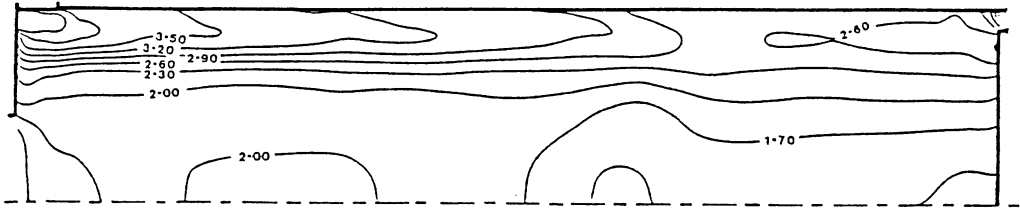


(v,w) vectors

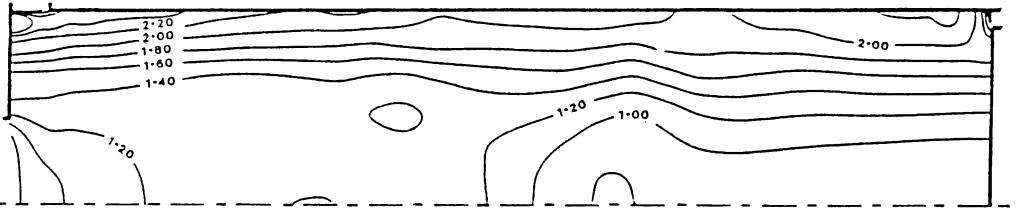


(u,v) vectors

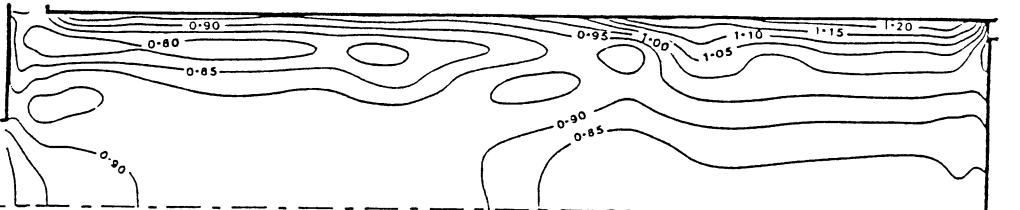
第6図 密度, 圧力, 温度の等高線と速度ベクトル ($P_1=5$)



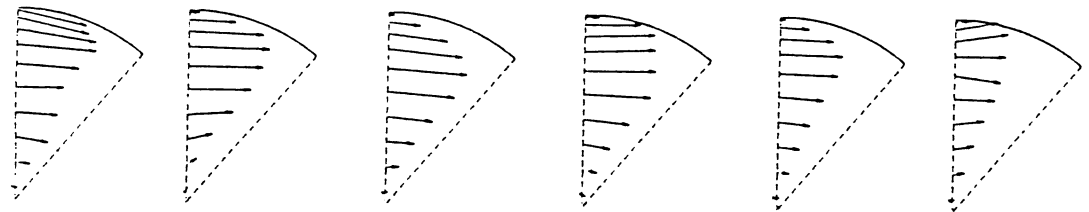
Density contour



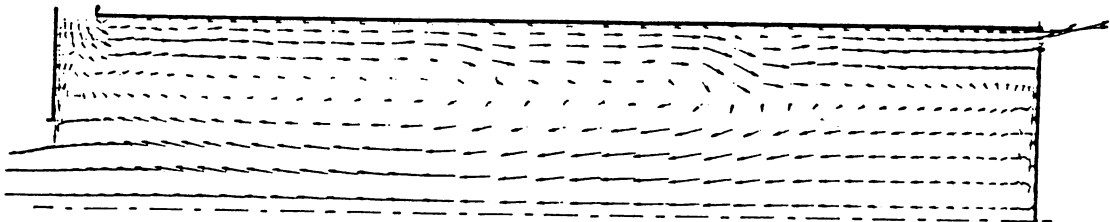
Pressure contour



Temperature contour



(v,w) vectors



(u,v) vectors

第7図 密度、圧力、温度の等高線と速度ベクトル ($P_1=7$)

文 献

- 網谷龍夫, 足立武司, 倉ヶ崎六夫, 藤井 哲 (1983) :
大形ボルテックスチューブの実験と温度分離機構に
関する研究. 三菱重工技報, **20**, 6-13.
- Beam, R. M. and Warming, R. F. (1978) : An implicit
factored scheme for the compressible Navier-
Stokes equations. *AIAA Journal*, **16**, 393-401.
- Pulliam, T. H. and Chaussee, D. S. (1981) : A diago-
nal form of an implicit approximate factorization
algorithm. *Journal of Computational Physics*, **39**,
347-363.
- Ranque, G. (1933) : Experiences sur la detente gir-
atoire avec productions simultanees d'un echap-
pement d'air chaud et d'un echappement d'air
froid. *J. Phys, Radium*, **4**, 112-114.
- Stephan, K., Lin, S., Durst, M., Huang, F. and Seher,
D. (1983) : An investigation of energy separation
in a vortex tube. *International Journal of Heat
and Mass Transfer*, **26**, 341-348.
- Stephan, K., Lin, S., Durst, M., Huang, F. and Seher,
D. (1984) : A similarity relation for energy sepa-
ration in a vortex tube. *International Journal of
Heat and Mass Transfer*, **27**, 911-920.